入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1				氏名	

1 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ とする.

a) $f(x,y)$ の各変数に関する 2 階までの偏微分をすべて計算せよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3 = 3(y-1)(y+1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

b) $f(x,y)$ の x, y に関する偏微分がともに 0 になるような x, y の組をすべて求めよ.

$$\begin{cases} 3(x-1)(x+1) = 0 \\ 3(y-1)(y+1) = 0 \end{cases}$$ を解く.

1 番目の式より，$x = 1$ または $x = -1$，2 番目の式より $y = 1$ または $y = -1$ であるから，求める (x,y) の組は $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$ の 4 つ.

c) $f(x,y)$ の各臨界点において極大・極小を判定せよ.

$D(x,y)$ を計算すると $D(x,y) = 36xy$ となる.

$(x,y) = (1,-1), (-1,1)$ のときは，$D(1,-1) = D(-1,1) = -36 < 0$ となるので，$(1,-1), (-1,1)$ は $f(x,y)$ の鞍点となる.

$(x,y) = (1,1)$ のとき，$D(1,1) = 36 > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0$ より，$f(x,y)$ は $(1,1)$ で極小.

$(x,y) = (-1,-1)$ のとき，$D(-1,-1) = 36 > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 < 0$ より，$f(x,y)$ は $(-1,-1)$ で極大.

2 関数 $f(x,y) = x^2 - 2xy + y + 2y^2 - y^3$ の臨界点をすべて求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 2(x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 1 + 4y - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 - 6y$$

$f(x,y)$ の x, y に関する偏微分がともに 0 になるような x, y の組をすべて求めるために

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 1 + 4y - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

を解く．まず，1 番目の式から $y = x$ が得られるので，それを 2 番目の式に代入すると，

$$-3x^2 + 2x + 1 = -(3x+1)(x-1) = 0 \iff x = 1, -\frac{1}{3}$$

よって，偏微分がともに 0 になるような (x,y) は，$(x,y) = (1,1), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ の 2 つ.

次に，$D(x,y)$ を計算すると

$$D(x,y) = 2 \times (4 - 6y) - (-2) \times (-2) = -12y + 4$$

$(x,y) = (1,1)$ のとき，$D(1,1) = -8 < 0$ なので，$(1,1)$ は $f(x,y)$ の鞍点.

$(x,y) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ のとき，$D(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 8 > 0$ かつ，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = 2 > 0$ なので，$f(x,y)$ は $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ で極小となる.

$\boxed{3}$ 関数 $f(x,y) = xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$ の臨界点をすべて求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-y) = (1-y^2)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2x)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + (1-x^2)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-x) = (x^2-3x)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (1-y^2)e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + (1-y^2)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2)(1-y^2)e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1-x^2)e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + (1-x^2)ye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-y) = (1-x^2)(1-y^2)e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2y)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} + (1-y^2)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \cdot (-y) = (y^2-3y)xe^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$f(x,y)$ の x, y に関する偏微分がともに 0 になるような x, y の組をすべて求める．そのためには，$e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$ はいつでも正の値をとることに注意して，

$$\begin{cases} (1-x^2)y = 0 \\ (1-y^2)x = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．まず，1 番目の式から $y = 0$ または $x = 1$ または $x = -1$ が得られる．

$y = 0$ のとき，2 番目の式より，$x = 0$.

$x = 1$ のとき，2 番目の式より，$y^2 = 1$，すなわち $y = \pm 1$

$x = -1$ のとき，2 番目の式より，$y^2 = -1$，すなわち $y = \pm 1$

以上をまとめると，求める (x,y) の組は $(0,0), (1,1), (1,-1)(-1,1), (-1,-1)$ の計 5 つ.

次に，$D(x,y)$ を計算すると

$$D(x,y) = \left((x^2-3x)y \cdot (y^2-3y)x - (1-x^2)^2(1-y^2)^2\right)e^{-(x^2+y^2)}$$

となる．（ここでこの式を無理に展開する必要はない.）

$(x,y) = (0,0)$ のとき，$D(0,0) = -1 < 0$ なので，$(0,0)$ は $f(x,y)$ の鞍点.

$(x,y) = (1,1)$ のとき，$D(1,1) = 4e^{-2} > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -2e^{-1} < 0$ なので極大.

$(x,y) = (1,-1)$ のとき，$D(1,-1) = 4e^{-2} > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 2e^{-1} > 0$ なので極小.

$(x,y) = (-1,1)$ のとき，$D(-1,1) = 4e^{-2} > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 2e^{-1} > 0$ なので極小.

$(x,y) = (-1,-1)$ のとき，$D(-1,-1) = 4e^{-2} > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -2e^{-1} < 0$ なので極大.

（答）$f(x,y)$ は $(1,1), (-1,-1)$ で極大，$(1,-1), (1,-1)$ で極小となり，$(0,0)$ は鞍点.

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)