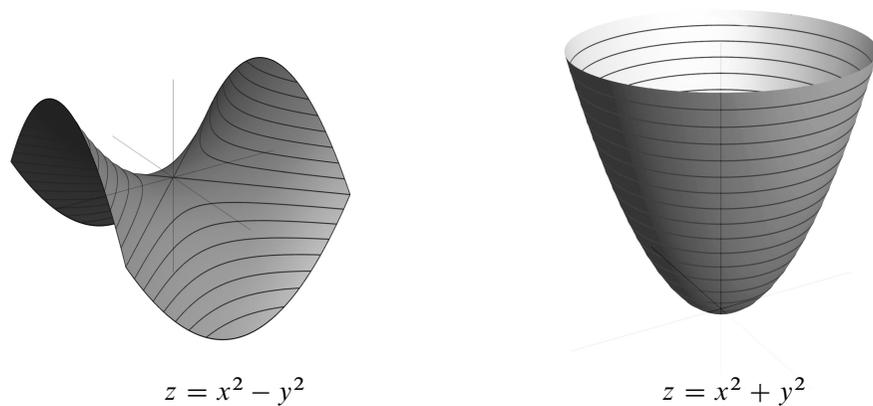


入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1変数関数では、各点においてグラフの接線が水平でなければ、ある一方向には増大し、その反対方向には減少する。これは2変数の場合も同様で、接平面が傾いていれば、関数のグラフである曲面もその点で山の頂や谷の底にはなり得ない。したがって、関数が点 (a, b) で極大または極小となるための必要条件として

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

が得られる。ただし、これは極大または極小となるための必要条件であって、必ずしも十分条件ではない。上の必要条件を満たすような点 (a, b) を $f(x, y)$ の**臨界点**と呼ぶ。下の図で、原点 $(0, 0)$ はともに臨界点である。



2変数関数の場合、上の左のグラフのに見られるように、接平面が水平であってもその点において極大にも極小にもならない点が存在する。1変数関数の場合、極大・極小の判定は増減表によって行えるが、2変数以上の関数では増減表は書くことができない。したがって、臨界点における極大・極小の判定は2階の偏導関数が用いられる。

2階偏導関数

2変数関数 $z = f(x, y)$ の2つの偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ と $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ はまた2変数関数となる。これらの x または y に関する偏微分を計算することにより4つの関数が得られる。これらを $z = f(x, y)$ の2階の偏微分と呼ぶ。これらは次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

ある緩い条件の下に $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ は一致することが知られている。

1) 次の関数の2階の偏微分をすべて計算せよ。

a) $f(x, y) = x^2y + xy^3$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-xy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{\frac{3}{2}}}$$

c) $f(x, y) = e^{-x/y}$

d) $f(x, y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{y}e^{-x/y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2}e^{-x/y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3y^{\frac{1}{4}}}{4x^{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{4y^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2}e^{-x/y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-x + y}{y^3}e^{-x/y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{3y^{\frac{1}{4}}}{16x^{\frac{5}{4}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{3}{16x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-x + y}{y^3}e^{-x/y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 2xy}{y^4}e^{-x/y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{3}{16x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{3x^{\frac{3}{4}}}{16y^{\frac{7}{4}}}$$

2変数関数の2次近似

関数 $z = f(x, y)$ の臨界点 (a, b) において x を $a + \Delta x$ に、 y を $b + \Delta y$ に同時に変化させたとき、 z の増分 Δz は近似的に次の式で与えられることが知られている。

$$\Delta z \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \Delta y^2 \right)$$

ここで Δz の近似式は $\Delta x, \Delta y$ の2次同次式で $\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2)$ の形になっている。これは $A \neq 0$ のときは平方完成によって、

$$\Delta z \approx A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A\left(\Delta x + \frac{B}{A}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{AC - B^2}{A}\right)\Delta y^2$$

と変形できることから、

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \quad \text{と} \quad AC - B^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2$$

の正負によって極大・極小が判定できる。例えば、 $A, AC - B^2$ がともに正ならば、 $\Delta z = (\text{正数})\Delta x^2 + (\text{正数})\Delta y^2$ の形になり、 Δz は $\Delta x = \Delta y = 0$ を除いて常に正となる。したがって、 $z = f(x, y)$ は (a, b) で極小になる。また、 $AC - B^2 < 0$ のときは、 A と $(AC - B^2)/A$ の符号が異なるので、 Δz は正の値も負の値もどちらも取り得る。 $A = 0$ の場合も Δz は正の値も負の値もどちらも取り得ることが容易にわかる。以上をまとめると次のようになる。

2変数関数の極大・極小判定法

(1) まず $z = f(x, y)$ の臨界点を求める。すなわち、次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

(2) 2階微分を計算し、 $D(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2$ を計算する。
このとき各臨界点 (a, b) において

(a) $D(a, b) > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ となれば f は (a, b) で極小。(グラフは谷底型)

(b) $D(a, b) > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ となれば f は (a, b) は極大。(グラフは山頂型)

(c) $D(a, b) < 0$ となれば f は (a, b) で極大でも極小でもない(グラフは峠点、鞍点)。

(d) $D(a, b) = 0$ ならばこの方法では判定不能。

1 $f(x, y) = x^3 - 6x^2 + x^2y^2 - 4y^2$ とする。

a) $f(x, y)$ の各変数に関する2階までの偏微分をすべて計算せよ。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12x + 2xy^2 = x(3x - 12 + 2y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 8y = 2y(x - 2)(x + 2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 12 + 2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 8$$

b) $f(x, y)$ の x, y に関する偏微分がともに0になるような x, y の組をすべて求めよ。

$$\begin{cases} x(3x - 12 + y^2) = 0 \\ 2y(x - 2)(x + 2) = 0 \end{cases} \text{ を解く.}$$

2番目の式より、 $y = 0$ または $x = 2$ または $x = -2$ 。

$y = 0$ のとき、1番目の式より、 $x = 0$ または $x = 4$

$x = 2$ のとき、1番目の式より、 $y^2 = 3$ 、すなわち $y = \pm\sqrt{3}$

$x = -2$ のとき、1番目の式より、 $y^2 = 9$ 、すなわち $y = \pm 3$

以上をまとめると、求める (x, y) の組は $(0, 0), (0, 4), (2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3}), (-2, 3), (-2, -3)$

c) $f(x, y)$ の各臨界点において極大・極小を判定せよ。

$$D(x, y) \text{ を計算すると } D(x, y) = 4(24 - 12x - 6x^2 + 3x^3 - 4y^2 - 3x^2y^2)$$

$$D(0, 0) = 96 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -12 < 0 \text{ より, } f(x, y) \text{ は } (0, 0) \text{ で極大.}$$

$$D(4, 0) = 288 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4, 0) = 12 > 0 \text{ より, } f(x, y) \text{ は } (4, 0) \text{ で極小.}$$

$$D(-2, 3) = D(-2, 3) = -576 < 0, \quad D(2, \sqrt{3}) = D(2, -\sqrt{3}) = -192 \text{ より, } (-2, 3), (-2, -3), (2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3}) \text{ の各点は } f(x, y) \text{ の鞍点となる.}$$