入学年度	学部	学科		組		番号			検	フリガナ	
		B		1						氏名	

底面の半径 r cm，高さ h cm の直円柱の体積 V は $V = \pi r^2 h$ と表せる．いま，r と h をともに変数と考え，正の実数全体をいろいろ変化させると，体積 V は 2 変数 r，h の関数と考えられる．この視点に立って，次のように表す．

(1) $$V(r,h) = \pi r^2 h$$

いま，底面の半径 r と高さ h が，それぞれ，わずかに Δr cm，Δh cm ずつ変化したとき，直円柱の体積 V がどのように変化するかを考える．まず，h を固定して r だけを Δr だけ変化させると，V の増分 $\Delta V = V(r+\Delta r, h) - V(r)$ の Δr に対する変化率 $\dfrac{\Delta V}{\Delta r}$ は

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{V(r+\Delta r,h) - V(r)}{\Delta r}$$

と表せる．ここで，$\Delta r \to 0$ とした極限を考えると，右辺の極限は導関数の定義に他ならないので，

$$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{V(r+\Delta r,h) - V(r)}{\Delta r} = \text{“}V'(r,h)\text{”}$$

表したくなるが，ダッシュ “ ′ ” を用いる記号法では何を変数と考え，何を固定しているのかが不明であり不都合である．そこで，

(2) $$\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{V(r+\Delta r,h) - V(r)}{\Delta r} = \frac{\partial V}{\partial r} \text{ または } \frac{\partial V}{\partial r}(r,h)$$

と表し，これを $V(r,h)$ **の変数** r **に関する偏微分**と呼ぶ．記号 ∂ を d の代わりに使うのは，V が多変数の関数で，r 以外の変数を固定して微分係数を計算していることを強調するためである．微分は 1 次近似であることの表現 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ を思い出すと

(3) $$V(r+\Delta r,h) = V(r,h) + \frac{\partial V}{\partial r}(r,h)\Delta r + o(\Delta r)$$

と表すことが出来る．逆に，r を固定して，h を変化させるとき，

(4) $$\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta h} = \lim_{\Delta h\to 0}\frac{V(r,h+\Delta h) - V(r)}{\Delta r} = \frac{\partial V}{\partial h} \text{ または } \frac{\partial V}{\partial h}(r,h)$$

と定義され，

(5) $$V(r,h+\Delta h) = V(r,h) + \frac{\partial V}{\partial h}(r,h)\Delta h + o(\Delta r)$$

(1) から，具体的に計算すると

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta r} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\pi(r+\Delta r)^2 h - \pi r^2 h}{\Delta r} = \pi\left(\lim_{\Delta r\to 0}\frac{(r+\Delta r)^2 - r^2}{\Delta r}\right)h = 2\pi r h$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = \lim_{\Delta h\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta h} = \lim_{\Delta h\to 0}\frac{\pi r^2(h+\Delta h) - \pi r^2 h}{\Delta h} = \pi\left(\lim_{\Delta r\to 0}\frac{(h+\Delta h) - r}{\Delta h}\right)h = \pi r^2$$

$$V(r+\Delta r,h) = V(r,h) + 2\pi r h\Delta r + o(\Delta r)$$
$$V(r,h+\Delta h) = V(r,h) + \pi r^2\Delta h + o(\Delta h)$$

2 変数関数の偏微分

2 変数関数 $z = f(x,y)$ に対し，変数 y は固定して定数と見なし，z を x の 1 変数関数と見なして微分を計算したものを $z = f(x,y)$ の x に関する偏微分と呼ぶ．これを

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_1(x,y) = f_x(x,y) = \partial_x f(x,y)$$

などと様々な記号で表わされる．同様にして変数 x は固定して定数と見なし，z を y の 1 変数関数と見なして微分を計算したものを $z = f(x,y)$ の y に関する偏微分と呼び

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_2(x,y) = f_y(x,y) = \partial_y f(x,y)$$

などと表す．

$\boxed{1}$ 底面の半径 r cm，高さ h cm の直円柱の底面の半径と高さが，それぞれ，わずかに Δr cm，Δh cm ずつ増えたとき，直円柱の表面 S はそれぞれ約何 cm^2 位増えるか．

表面積 S は $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ で与えられる．
半径が増えたとき：$\Delta S \fallingdotseq \dfrac{\partial S}{\partial r}\Delta r = (4\pi r + 2\pi h)\Delta r$ だけ増える．
高さが増えたとき：$\Delta S \fallingdotseq \dfrac{\partial S}{\partial h}\Delta r = 2\pi r\Delta h$ だけ増える．

$\boxed{2}$ 半径 5m，高さ 15m の円柱型のタンクがある．タンクの容積は，次のどちらの方法がより大きくなるかを偏微分による近似計算を用いて調べよ．

a）半径を 0.5cm 大きくする．　　b）高さを 1cm 延ばす．

半径を 0.5cm 大きくしたときの，容積 V の増分は

$\Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\Delta r \fallingdotseq 2\pi r h\Delta r = 2\pi \times 5 \times 15 \times 0.005 = 0.75\pi \ \mathrm{m}^3$

高さを 1cm 大きくしたときの，容積 V の増分は

$\Delta V = \dfrac{\partial V}{\partial h}\Delta h \fallingdotseq \pi r^2\Delta h = \pi \times 5 \times 15 \times 0.01 = 0.25\pi \ \mathrm{m}^3$

$\therefore$ 半径を 0.5cm 大きくしたときの方が容積は（3 倍）大きくなる．

【裏に続く】

$\boxed{3}$ ある町工場では 2 種類の自転車を製作している．ひとつの種類は標準モデルで，もう 1 種類は競技用モデルである．いま，一週間に，標準モデルを x 台，競技用モデルを y 台製作するのに

$$C(x, y) = 70 + 7x + 10y \text{（千円）}$$

の費用がかかるとしよう．さらに，価格と需要の関係は次の式にしたがっているとする．

$$p = 21 - 0.4x + 0.1y$$
$$q = 30 + 0.1x - 1.2y$$

ここで，x (台)，y (台) はそれぞれ標準モデルと競技用モデルの一週間の需要，p (千円)，q (千円) はそれぞれ，標準モデルと競技用モデルの値段である．

a) 一週間の歳入 $R(x, y)$ を求めよ．

$R(x, y) = 21x + 30y - 0.4x^2 + 0.2xy - 1.2y^2$

b) 一週間に得られる利潤 $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$ を求めよ．

$P(x, y) = 14x + 20y - 0.4x^2 + 0.2xy - 1.2y^2 - 70$

c) $P(x, y)$ について，$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ を求めよ．

$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 14 - 0.8x + 0.2y$,
$\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 20 + 0.2x - 2.4y$

d) 競技用モデルの毎週の生産台数が 10 台で一定のとき，標準モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか．

$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, 10) = 0$ のとき，P は最大になる．
$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x, 10) = 14 - 0.8x + 0.2 \times 10 = 16 - 0.8x = 0 \iff x = 20$
よって，標準モデルを 20 台生産するとき利潤は最大になる．

e) 逆に，標準モデルの毎週の生産台数が 25 台で一定のとき，競技用モデルを何台生産すれば利潤が最大となるか．

$\dfrac{\partial P}{\partial y}(25, y) = 0$ のとき，P は最大になる．
$\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, 10) = 20 + 0.2 \times 25 - 2.4y = 25 - 2.4x = 0 \iff x = 10.4\ldots$
$y = 10$ のとき，$P(25, 10) = 160$, $y = 11$ のとき，$P(25, 11) = 159.8$
よって，競技用モデルを 10 台生産するとき利潤は最大になる．

最初の例 $V(r, h) = \pi r^2 h$ において，r，h を同時に変化させるとどうなるかを考える．

$$\begin{aligned} V(r + \Delta r, h + \Delta h) &= \pi(r + \Delta r)^2(h + \Delta h) - \pi r^2 h = \pi\left(\left(r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2\right)(h + \Delta h) - r^2 h\right) \\ &= \pi(2r\Delta r \cdot h + r^2\Delta h) + \pi\left((\Delta r)^2 \cdot h + 2r\Delta r \cdot \Delta h + (\Delta r)^2 \cdot \Delta h\right) \end{aligned}$$

ここで，$(\Delta r)^2 \cdot h + 2\Delta r \cdot \Delta h + (\Delta r)^2 \cdot \Delta h$ は Δr と Δh の 2 次以上の式であって，Δr や Δh に比べて高位の無限小であり，Δr や Δh に比べて無視できる．従って，

$$V(r + \Delta r, h + \Delta h) \fallingdotseq 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h$$

と表せる．一般に，「高位の無限小」に関する取り扱いは簡単ではないが，関数 $f(x, y)$ が良い性質を持つ場合，次のことが知られている．

2 変数関数の 1 次近似

関数 $z = f(x, y)$ において x を a から $a + \Delta x$ に，y を b から $b + \Delta y$ に同時に変化させたとき，z の増分 Δz は近似的に

$$\Delta z \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot \Delta y$$

で与えられる．

$\boxed{4}$ 生産量 Q が資本 K と労働力 L の関数として $Q = 3K^{2/3}L^{1/3}$ と表わされている．

a) $\dfrac{\partial Q}{\partial K}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial L}$ を求めよ．

【注】 $\dfrac{\partial Q}{\partial K}$ は **資本の限界生産力**，$\dfrac{\partial Q}{\partial L}$ は **労働の限界生産力** と呼ばれる．

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 2K^{-\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} = 2\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial L} = K^{\frac{2}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{3}}$$

b) いま (K, L) が $(1000, 125)$ から $(998, 128)$ に変化したとき，Q の変化量の近似値を求めよ．

$$\begin{aligned} \Delta Q &\fallingdotseq \frac{\partial Q}{\partial K}(1000, 125)\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}(1000, 125) \cdot \Delta y \\ &= 2\left(\frac{125}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} \times (-2) + \left(\frac{1000}{125}\right)^{\frac{2}{3}} \times 12 \\ &= -2 + 12 = 10 \end{aligned}$$