

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

① $\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の2次近似の式を用い $\sqrt{27}$ の近似値を求めよ. また, このようにして得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか.

$f(x) = \sqrt{1+x}$ とおいて 上の高次微分による近似式の $n=3$, $h = \frac{8}{100}$ の場合を用いる.

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{-1}{4(1+0)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

より,

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4 \times 2!}h^2 + R_3(h)$$

であり, また, $x \geq 0$ のとき, $(1+x)^{5/2} \geq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから,

$$0 \leq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

すなわち, $f'''(x)$ は $x=0$ のとき最大値 $3/8$ をとる. 一方, 最小値については正確な値はよくわからないが, 0 以上であることはすぐにわかる.

したがって, 近似値は

$$\sqrt{27} = 5\sqrt{1 + \frac{8}{100}} \approx 5 + \frac{5}{2} \frac{8}{100} - \frac{5}{8} \left(\frac{8}{100}\right)^2 = 5.1960$$

で, 近似の誤差は,

$$0 \leq 5R_3\left(\frac{8}{100}\right) \leq 5 \frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!} \left(\frac{8}{100}\right)^3 \approx 0.000160 \dots$$

と評価できる. すなわち,

$$5.1960 \leq \sqrt{27} \leq 5.1960 + 0.000160 = 5.196160 \dots$$

となる. これより, $\sqrt{27}$ の小数点以下第3位までの値は 5.196 であることがわかる.

② $f(x) = e^x$, $h=1$, $n=6$ として e の近似値を求め, 誤差の範囲を評価せよ.

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ なので,

$$e^h = 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{4!}h^4 + \frac{1}{5!}h^5 + R_6(h)$$

$h \geq 0$ のとき, $f^{(n)}(x) = e^x$ は $0 \leq x \leq h$ では $x=0$ のとき最小値 1 , $x=h$ のとき最大値 e^h をとる. $h=1$ とすると,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.71666667 \dots$$

であり, 誤差は

$$\frac{1}{6!} = 0.00138889 \dots \leq R_6(1) \leq \frac{e}{6!} \leq \frac{3}{6!} = 0.00416667 \dots$$

と評価できる. これより,

$$2.71806 \dots \leq e \leq 2.72083 \dots$$

したがって, e の近似値は小数第1位まで正しいことがわかる. 第3位は 1 か 2 はこれでは判断できない.

3] a) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ とし, $f'(x), f''(x), f'''(x)$ を計算せよ.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$$

b) α を正の実数とするとき, $\sqrt[3]{1+\alpha}$ の 2 次の近似式 $f(0) + f'(0)\alpha + \frac{f''(0)}{2!}\alpha^2$ を求めよ. またこのときの誤差の範囲を評価せよ.

$$f(0) + f'(0)\alpha + \frac{f''(0)}{2!}\alpha^2 = 1 + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2$$

誤差を $R_3(\alpha)$ とすると, $0 < x < \alpha$ のとき $0 \leq (1+x)^{-\frac{8}{3}} \leq 1$ が成り立つから, 次の不等式 (評価式) が成り立つ.

$$0 \leq R_3(\alpha) \leq \frac{f'''(0)}{3!}\alpha^3 = \frac{5}{81}\alpha^3.$$

c) $\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$ という表示を用いて $\sqrt[3]{9}$ の近似値を計算せよ. また, このようにして得られた近似値と $\sqrt[3]{9}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか.

$1 + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{9}$ に $\alpha = \frac{1}{8}$ を代入して実際に計算すると

$$\sqrt[3]{9} \approx 2\left(1 + \frac{1}{3 \times 8} - \frac{1}{9 \times 8^2}\right) = 2.07986111\dots$$

このとき誤差は

$$2 \times R_3(\alpha) = 2 \times \frac{5}{81} \times \frac{1}{8^3} = 0.00024112\dots$$

より小さいから,

$$2.07986 \leq \sqrt[3]{9} \leq 2.07986111\dots + 0.00024112\dots = 2.08010223\dots$$

したがって, 2.07986 は $\sqrt[3]{9}$ と小数第 1 位の 0 まで一致しているはずである. (しかし, これだけでは $\sqrt[3]{9} = 2.07\dots$ なのか $\sqrt[3]{9} = 2.08\dots$ なのかは判定できない.)