4 ❦ 漸近展開（つづき）/ 高次微分を用いた近似計算　２０２４年度後期　微分積分 II（火曜２限）

入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

以下の式はその他の主な関数の漸近展開である．一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる．

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

例 1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$ であるとは，$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \varepsilon_4(x)$ と表したとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_4(x)}{x^4} = 0$ となることである．これより，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + \varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)\\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)\end{aligned}$$

と書け，さらに，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)}{x^8} = \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)}{(-x^2)^4} = \lim_{X\to 0}\frac{\varepsilon_4\big(X^4\big)}{X^4} = 0$$

が成り立つ（2 番目の等号では $X = (-x)^2$ とおいた）．すなわち，$\varepsilon_4\big((-x^2)^4\big)$ は $o(x^8)$ に属する無限小である．この議論を踏まえ，次のように書いて構わないことがわかる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + o\big((-x^2)^4\big)\\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + o(x^8)\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ 次の関数の $x = 0$ のまわりの漸近展開を（ ）内の次数の項まで求めよ．

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 　(x^6 の項まで)

b) $\dfrac{x}{1+x^3}$ 　(x^7 の項まで)

c) $\log(1-x^2)$ 　(x^8 の項まで)

● 高次微分を用いた近似計算

関数 $f(x)$ において，a での値 $f(a)$ がわかっているとき，それから微少量 h だけ変化させたときの値 $f(a+h)$ の近似値を求めることを考える．前回見たように，$f(a+h)$ は

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \tag{1}$$

という形で 1 次近似できる．したがって，$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$ として近似値が計算できるはずである．例えば，$f(x) = \sqrt{x}$ としたとき，$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ であるから，$a = 1$，$h = 0.01$ とすると，$f'(1) = \dfrac{1}{2}$ であり，

$$\sqrt{1.01} = \sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}\times 0.01 = 1.005$$

とできるはずである．しかし，(1) 式は $h \to 0$ としたときの極限の様子を示すに過ぎず，h がある決まった値，例えば $h = 0.01$ であるときの “真の値” $f(a+h)$ と “近似値” $f(a) + f'(a)h$ との間の “誤差”

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - \big(f(a) + f'(a)h\big)$$

がどの程度の大きさの値なのかについては何も表していない．一般に，近似値を計算するとき，誤差 $\varepsilon(h)$ がどれくらいの範囲に収まっているかがわからないと近似値は本当の価値を持たない．

そこで，前回漸近展開を導いた方法をもう一度見直してみる．まず，$\displaystyle\int_0^h f'(a+x)\,dx = \Big[f(a+x)\Big]_0^h = f(a+h) - f(a)$ を書き直した式

$$f(a+h) = f(a) + \int_0^h f'(a+x)\,dx \tag{2}$$

から始める．ここで，$f(x)$ は 2 階微分可能であると仮定し，上の積分を（無理やり）部分積分を用いて計算する．部分積分の公式において，$u(x) = f'(a+x), v'(x) = x$ と置き，$v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ として，

$$\int_0^h f'(a+x)\,dx = \Big[f'(a+x)x\Big]_0^h - \int_0^h xf''(a+x)\,dx = f'(a)h - \int_0^h xf''(a+x)\,dx. \tag{3}$$

(2), (3) を合わせて，次の式を得る．

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h - \int_0^h x f''(a+x)\,dx \tag{4}$$

いま，誤差を $R_2(h) = f(a+h) - \big(f(a) + f'(a)h\big)$ と定義すると，(4) より

$$R_2(h) = f(a+h) - \big(f(a) + f'(a)h\big) = -\int_0^h x f''(a+x)\,dx$$

ここで，$f''(a+x)$ は 0 と h の間で最大値 M と最小値 m を持つと仮定すると（ほとんどの場合簡単に示すことができる），$m \leqq f''(a+x) \leqq M$ と表せ，$h>0$ と仮定すると，不等号の向きに注意して

$$-\int_0^h Mx\,dx \leqq -\int_0^h x f''(a+x)\,dx \leqq -\int_0^h mx\,dx$$

を得る．したがって，

$$-\frac{M}{2}h^2 \leqq R_2(h) \leqq -\frac{m}{2}h^2 \tag{5}$$

が成り立つ．$h<0$ のときも同じ式を示すことができる．この不等式 (5) は誤差を**評価する**式という．

例 2. $f(x)=\sqrt{x}$，$a=1$，$h=0.01$ としたとき，上で見たように $\sqrt{1+0.01} \fallingdotseq 1.005$ である．この場合 $f''(1+x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$ であり，$h=0$ のとき最大値 $M=\frac{1}{4}$，$h=0.01$ のとき最小値 $m=\frac{1}{4\sqrt{1.001}}$ をとる．m の正確な値はわからないが，$m>0$ であるので，$0<m \leqq f''(1+x) \leqq \frac{1}{4}$ が成り立つ．これより，$\sqrt{1+0.01}$ の値について次の不等式が得られる．

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 0.01^2 \leqq R_2(0.01) \leqq -\frac{m}{2}\times 0.01^2 < 0 \\
-0.000125 \leqq \sqrt{1+0.01} - 1.005 < 0 \\
\therefore 1.0049875 \leqq \sqrt{1+0.01} < 1.005
\end{gathered}$$

[電卓で $\sqrt{1.01}$ を計算すると，1.004987562 . . . となり，下限に近いことが分かる．]

さらに近似の精度を上げるために，**2 次近似式**を用いて計算することを考える．いま，$f(x)$ が 3 回微分可能であると仮定し，(4) 式の最後の積分をさらにもう一度部分積分することによって，次の式を得る．

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{1}{2}\int_0^h x^2 f'''(a+x)\,dx \tag{6}$$

先ほどと同様に，誤差を $R_3(h) = f(a+h) - \left(f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2\right)$ と定義すると，$R_3(h) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^h x^2 f'''(a+x)\,dx$ であり，$f'''(a+x)$ の 0 と h の間での最大値を M と最小値を m とすると，

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\int_0^h mx^2\,dx \leqq \frac{1}{2}\int_0^h x^2 f'''(a+x)\,dx \leqq \frac{1}{2}\int_0^h Mx^2\,dx \\
\frac{m}{6}h^3 \leqq R_3(h) \leqq \frac{M}{6}h^3
\end{gathered} \tag{7}$$

というごさの評価式が得られる．

例 3. $\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}}$ なので $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $h=\frac{1}{64}$ とおいて，近似値とそのときの誤差を求めてみる．まず，微分を計算すると，

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}, \qquad f''(1) = \frac{-1}{4(1)^{3/2}} = -\frac{1}{4}, \qquad f'''(1+x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

となる．したがって，近似値は

$$\sqrt{65} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} \fallingdotseq 8\left(f(1) + f'(1)\frac{1}{64} + \frac{f''(1)}{2!}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right) = 8.0622558\ldots \tag{8}$$

また，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{64}$ のとき，$(1+\frac{1}{64})^{5/2} \geqq (1+x)^{5/2} \geqq (1+0)^{5/2} = 1$ であるから，

$$0 < \frac{3}{8(1+\frac{1}{64})^{5/2}} \leqq f'''(1+x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leqq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

を得る．（すなわち，$f'''(1+x)$ は $x=0$ のとき最大値 $M=\frac{3}{8}$ をとる．一方，最小値 m については正確な値はよくわからないが，0 より大きいことはすぐにわかる．）(8) 式の近似の誤差は $8R_3(\frac{1}{64})$ だから，(7) の不等式を 8 倍して

$$0 \leqq 8\,R_3\left(\frac{1}{64}\right) \leqq 8\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^3 \fallingdotseq 0.00000190\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$8.0622558\ldots \leqq \sqrt{65} \leqq 8.0622558\ldots + 0.0000019\ldots = 8.0622577\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{65}$ の小数点以下第 5 位までの値は 8.06225 であることが結論できる．

$\boxed{2}$ $\sqrt{27} = 5\sqrt{1+\frac{8}{100}}$ という表示用い，上記と同じ方法で $\sqrt{27}$ の近似値を求め，このようにして得られた近似値と $\sqrt{27}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるかを述べよ．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)