

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

微分係数の定義をもう一度振り返ってみよう。関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は極限によって

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

と定義されるのであった。少し見方を変え、右辺と左辺の差を考えると、上の式は、

$$\left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = r(h) \text{ とおくと } \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0 \text{ が成り立つ。} \right] \quad (2)$$

言い換えることができる。さらに、(2)式の分母を払って整理し直すと、

$$f(a+h) - (f(a) + f'(a)h) = hr(h)$$

となる。そこで、 $\varepsilon(h) = hr(h)$ とおくと、 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)/h = 0$ が成り立つ。

微分係数と1次近似

関数 $f(x)$ の $x = a+h$ における値は、微分係数を $f'(a)$ を用いて

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h) \quad (3)$$

と表すとき、 $\varepsilon(h)$ は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$ をみたす。

例1. $f(x) = x^3$ とすると、 $(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + \varepsilon(h)$, $\varepsilon(h) = 3ah^2 + h^3$ と表すことができ、 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)/h = \lim_{h \rightarrow 0} (3ah + h^2) = 0$ が成り立つ。

上式(3)は、 h が十分小さいとき、 $f(x) = f(a+h)$ の近似式として、まず第0次近似、すなわち一番粗い近似として、もとの点 a での値 $f(a)$ がとれ、次にその修正項として、 h の位置近似 $f'(a)h$ がとれ、残りはそれより高次の微小量、すなわち h で割ってもなお0に近づくような項になる、というように読むことができる。このように解釈することで、微分とは1次近似のことであると言うことができる。

図形的には、曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における接線が $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ で表されることに注意すると、(3)は曲線 $y = f(x)$ と接線との差 $\varepsilon(h)$ が高次の微小量であることを意味するとも言える。

いま、 h を0に近づく独立変数とすると、これを独立無限小と呼ぶ。 $(h$ の代わりに Δx を用いることも多い。) この h に依存する量 $R(h)$ が $h \rightarrow 0$ とともに0に近づくとき、これを h の無限小、あるいは単に無限小という。一口に無限小と言ってもその小ささにはいろいろあり、これらを比較するため、標準的な無限小である h^n と比較して、次のようにいう。

高次の無限小

無限小 $R(h)$ は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h^n} = 0$ のとき、 $R(h)$ は h の n 次より高次の無限小であるといい、 $R(h) = o(h^n)$ と表す。

ここで、 h^n は n が大きくなるほど微小な量となることに注意する。 $n = 0$ のときは、 $R(h) = o(1)$ と記すが、これは $R(h)$ が無限小であるということに他ならない。また、2つの量 $R_1(h)$ と $R_2(h)$ の差が h^n より高次の無限小であるとき、 $R_1(h) = R_2(h) + o(h^n)$ と表す。

この記号 (ランダウの記号という) を使うと、関数 $f(x)$ の1次近似式は次のように表せる。

1次近似式

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

【注意】 $o(h)$ 、 $o(h^2)$ などのはあくまで略記法であって、実際の関数を表すものではないことに注意する。 $o(h^n)$ とは n 次より高次の無限小を一括りにして略記したもので、積分定数 C と似た扱いがなされる。また、 $o(h^0) = o(1)$ とは単に無限小である関数、すなわち0のまわりで定義された関数 $\varepsilon(x)$ で、 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ とをみたすもの全般を表す。

では、 $f(x)$ の2次近似式はどのようなものになるであろうか。いま、 $f(x)$ は2階微分可能であると仮定すると、 $f'(x)$ についての1次近似式

$$f'(a+h) = f'(a) + f''(a)h + \varepsilon_1(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(h)}{h} = 0$$

と表すことが出来る。左式の h を x と書き直して x の関数と見直し、両辺を0から h まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^h f'(a+x) dx &= \int_0^h f'(a) dx + \int_0^h f''(a)x dx + \int_0^h \varepsilon_1(x) dx \\ \Rightarrow [f(a+x)]_0^h &= f'(a)[x]_0^h + f''(a)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^h + \int_0^h \varepsilon_1(x) dx \\ \Rightarrow f(a+h) - f(a) &= f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \int_0^h \varepsilon_1(x) dx \\ \Rightarrow f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \varepsilon_2(h) \quad \text{ただし、} \varepsilon_2(h) = \int_0^h \varepsilon_1(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

(ここから少し厳密性を欠くが) いま、 $\varepsilon_1(x)$ が微分可能であるとすると、 $\varepsilon_1(x) = 1 \cdot \varepsilon_1(x)$ とみて部分積分することにより、

$$\varepsilon_2(h) = \int_0^h \varepsilon_1(x) dx = [x\varepsilon_1(x)]_0^h - \int_0^h x\varepsilon_1'(x) dx = h\varepsilon_1(h) - \int_0^h x\varepsilon_1'(x) dx$$

を得る。ここで、さらに $h \rightarrow 0$ としたとき、 $\varepsilon_1'(h)$ がある一定値 c に近づくとする、最後の積分は

$$\int_0^h x\varepsilon_1'(x) dx \doteq \int_0^h xc dx = \frac{c}{2}h^2$$

となる。したがって、

$$\frac{\varepsilon_2(h)}{h^2} = \frac{\varepsilon_1(h)}{h} - \frac{1}{h} \int_0^h x\varepsilon_1'(x) dx \doteq \frac{\varepsilon_1(h)}{h} - \frac{c}{2}h^2 \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \quad (5)$$

すなわち、 $\varepsilon_2(h)$ は2次より高次の無限小であることが示される。以上、(4)と(5)を合わせて、関数 $f(x)$ の2次近似の式を得る。

2次近似式

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2),$$

1次近似式から2次近似式を得る方法を繰り返すことによって、次の n 次近似式が得られる。

n 次近似式

$$f(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

上の式はしばしば、 $a = 0$ とおき h の代わりに x と書き直して、次のように記されることが多い。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (6)$$

この式は、 $x \rightarrow 0$ としたときの極限に関しては、 $f(x)$ が、 $f(x) = (n$ 次の多項式) $+(n$ 次より高次の無限小)と表されていることを示している。(6)の形の式を $f(x)$ の $x = 0$ のまわりでの n 次漸近展開と呼ぶ。大雑把にいうと、 $f(x)$ は $x = 0$ のまわりで多項式に「展開」でき、残りはは無視できる「 x^{n+1} 以上の項」として一括りにし $o(x^n)$ と表す、ということである。 $f(x)$ の漸近展開は $x \rightarrow 0$ としたときの極限の計算に有用である。

例2. $f(x) = e^x$ とすると、任意の n について、 $f^{(n)}(x) = e^x$ だから、 $f^{(n)}(0) = 1$ となり、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

例3. 等比級数の和の公式 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ の左辺と右辺を入れ換えて考えると、

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

1 次の関数の $x = 0$ のまわりの漸近展開を()内の次数の項まで求めよ。

a) $\sqrt{1+x}$ (x^4 の項まで)

b) $\log(1+x)$ (x^4 の項まで)

c) $\sqrt[3]{1+x}$ (x^3 の項まで)

d) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (x^4 の項まで)

2 漸近展開を用いて次の極限を求めよ。

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$