入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
	B		1			氏 名

微分係数の定義をもう一度振り返ってみよう．関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は極限によって

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

と定義されるのであった．少し見方を変え，右辺と左辺の差を考えると，上の式は，

$$「\ \frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)=r(h)\quad \text{とおくと}\quad \lim_{h\to0}r(h)=0\quad \text{が成り立つ.}」 \tag{2}$$

言い換えることができる．さらに，(2) 式の分母を払って整理し直すと，

$$f(a+h)-\big(f(a)+f'(a)h\big)=hr(h)$$

となる．そこで，$\varepsilon(h)=hr(h)$ とおくと，$\lim_{h\to0}=\lim_{h\to0}\varepsilon(h)/h=0$ が成り立つ．

微分係数と 1 次近似

関数 $f(x)$ の $x=a+h$ における値は，微分係数を $f'(a)$ を用いて

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\varepsilon(h) \tag{3}$$

と表すとき，$\varepsilon(h)$ は $\lim_{h\to0}\dfrac{\varepsilon(h)}{h}=0$ をみたす．

例 1. $f(x)=x^3$ とすると，$(a+h)^3=a^3+3a^2h+\varepsilon(h)$，$\varepsilon(h)=3ah^2+h^3$ と表すことができ，$\lim_{h\to0}\varepsilon(h)/h=\lim_{h\to0}(3ah+h^2)=0$ が成り立つ．

上式 (3) は，h が十分小さいとき，$f(x)=f(a+h)$ の近似式として，まず第 0 次近似，すなわち一番粗い近似として，もとの点 a での値 $f(a)$ がとれ，次にその修正項として，h の位置近似 $f'(a)h$ がとれ，残りはそれより高次の微小量，すなわち h で割ってもなお 0 に近づくような項になる，というように読むことができる．このように解釈することで，**微分とは 1 次近似のことである**と言うことができる．

図形的には，曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線が $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ で表されることに注意すると，(3) は曲線 $y=f(x)$ と接線との差 $\varepsilon(h)$ が高次の微小量であることを意味するとも言える．

いま，h を 0 に近づく独立変数とするとき，これを**独立無限小量**と呼ぶ．(h の代わりに Δx を用いることも多い．）この h に依存する量 $R(h)$ が $h\to0$ とともに 0 に近づくとき，これを h の**無限小量**，あるいは単に**無限小**という．一口に無限小と言ってもその小ささにはいろいろあり，これらを比較するため，標準的な無限小量である h^n と比較して，次のようにいう．

高次の無限小

無限小 $R(h)$ は $\lim_{h\to0}\dfrac{R(h)}{h^n}=0$ のとき，$R(h)$ は h の <u>n 次より高次</u>**の無限小**であるといい，$R(h)=o(h^n)$ と表す．

ここで，h^n は n が大きくなるほど微小な量となることに注意する．$n=0$ のときは，$R(h)=o(1)$ と記すが，これは $R(h)$ が無限小であるということに他ならない．また，2 つの量 $R_1(h)$ と $R_2(h)$ の差が h^n より高次の無限小であるとき，$R_1(h)=R_2(h)+o(h^n)$ と表す．

この記号（ランダウの記号という）を使うと，関数 $f(x)$ の 1 次近似式は次のように表せる．

1 次近似式

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+o(h)$$

【注意】$o(h)$、$o(h^2)$ などははあくまで<u>略記法</u>であって，実際の関数を表すものではないことに注意する．$o(h^n)$ とは n 次より高次の無限小を一括りにして略記したもので，積分定数 C と似た扱いがなされる．また，$o(h^0)=o(1)$ とは単に無限小である関数，すなわち 0 のまわりで定義された関数 $\varepsilon(x)$ で，$\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$ とをみたすもの全般を表す．

では，$f(x)$ の 2 次近似式はどのようなものになるであろうか．いま，$f(x)$ は 2 階微分可能であると仮定すると，$f'(x)$ についての 1 次近似式

$$f'(a+h)=f'(a)+f''(a)h+\varepsilon_1(h),\qquad \lim_{h\to0}\frac{\varepsilon_1(h)}{h}=0$$

と表すことが出来る．左式の h を x と書き直して x の関数と見直し，両辺を 0 から h まで積分すると，

$$\begin{aligned}
&\int_0^h f'(a+x)\,dx=\int_0^h f'(a)\,dx+\int_0^h f''(a)x\,dx+\int_0^h \varepsilon_1(x)\,dx\\
\Rightarrow\ &\Big[f(a+x)\Big]_0^h=f'(a)\Big[x\Big]_0^h+f''(a)\Big[\frac12x^2\Big]_0^h+\int_0^h\varepsilon_1(x)\,dx\\
\Rightarrow\ &f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\int_0^h\varepsilon_1(x)\,dx\\
\Rightarrow\ &f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\varepsilon_2(h)\quad \text{ただし，}\varepsilon_2(h)=\int_0^h\varepsilon_1(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

（ここから少し厳密性を欠くが）いま，$\varepsilon_1(x)$ が微分可能であるとすると，$\varepsilon_1(x)=1\cdot\varepsilon_1(x)$ とみて部分積分することにより，

$$\varepsilon_2(h)=\int_0^h\varepsilon_1(x)\,dx=\Big[x\varepsilon_1(x)\Big]_0^h-\int_0^h x\varepsilon_1'(x)\,dx=h\varepsilon_1(h)-\int_0^h x\varepsilon_1'(x)\,dx$$

を得る．ここで，さらに $h\to0$ としたとき，$\varepsilon_1'(h)$ がある一定値 c に近づくとすると，最後の積分は

$$\int_0^h x\varepsilon_1'(x)\,dx\fallingdotseq\int_0^h xc\,dx=\frac{c}{2}h^2$$

となる．したがって，

$$\frac{\varepsilon_2(h)}{h^2}=\frac{e_1(h)}{h}-\frac1h\int_0^h x\varepsilon_1'(x)\,dx\fallingdotseq\frac{e_1(h)}{h}-\frac{c}{2}h^2\to0\quad(h\to0) \tag{5}$$

すなわち，$\varepsilon_2(h)$ は 2 次より高次の無限小であることが示される．以上，(4) と (5) を合わせて，関数 $f(x)$ の 2 次近似の式を得る．

2 次近似式

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+o(h^2),$$

【裏に続く】

1 次近似式から 2 次近似式を得る方法を繰り返すことによって，次の n 次近似式が得られる．

n 次近似式

$$f(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

上の式はしばしば，$a = 0$ とおき h の代わりに x と書き直して，次のように記されることが多い．

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{6}$$

この式は，$x \to 0$ としたときの極限に関しては，$f(x)$ が，$f(x) = (n$ 次の多項式$)+(n$ 次より高次の無限小$)$ と表されていることを示している．(6) の形の式を $f(x)$ の $x = 0$ のまわりでの **n 次の漸近展開**と呼ぶ．大雑把にいうと，$f(x)$ は $x = 0$ のまわりで多項式に「展開」でき，残りはは無視できる「x^{n+1} 以上の項」として一括りにし $o(x^n)$ と表す，ということである．$f(x)$ の漸近展開は $x \to 0$ としたときの極限の計算に有用である．

例 2. $f(x) = e^x$ とすると，任意の n について，$f^{(n)}(x) = e^x$ だから，$f^{(n)}(0) = 1$ となり，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

例 3. 等比級数の和の公式 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ の左辺と右辺を入れ換えて考えると，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$\boxed{1}$ 次の関数の $x = 0$ のまわりの漸近展開を（）内の次数の項まで求めよ．

a) $\sqrt{1+x}$ （x^4 の項まで）

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$$

b) $\log(1+x)$ （x^4 の項まで）

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

c) $\sqrt[3]{1+x}$ （x^3 の項まで）

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3)$$

d) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ （x^4 の項まで）

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

$\boxed{2}$ 漸近展開を用いて次の極限を求めよ．

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}$

$$x - \log(1+x) = x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + o(x)$$ （最初 3 次まで展開する必要はなかった．）

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + o(x)\right) = \frac{1}{2}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)}$

$$xe^x - x - x^2 = x\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)\right) - x - x^2 = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$x - \log(1+x) = x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2}x + o(x)}{\frac{1}{2} + o(x^0)} \to \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)} = 0$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

$f(x) = (1+x)^n$ とおくと，$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ だから，

$$(1+x)^n = f(0) + f'(0)x + o(x) = 1 + nx + o(x)$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{nx + o(x)}{x} = n + o(x^0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(n + o(x^0)\right) = n.$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)}\right)$

まず，$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\log(1+x)} = \dfrac{\log(1+x) - x}{x\log(1+x)}$ と通分する，

$\log(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$，　$x\log(1+x) = x\left(x + o(x)\right) = x^2 + o(x^2)$ と展開して，

$$\frac{\log(1+x) - x}{x\log(1+x)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(x^0)}{1 + o(x^0)}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(x^0)}{1 + o(x^0)} = -\frac{1}{2}$$