2023 年度 後期

中央大学 経済学部
担当 鍬田 政人

微分積分 II — 期末試験

2024 年 1 月 16 日

時間 80 分

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく途中の計算や説明も書くこと．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ.

a) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x}\,dx$ （$1-2x=t$ とおく.）

b) $\displaystyle\int (2x+1)e^{-2x}\,dx$ （部分積分）

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{1+x}$ とおく.

a) $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ をそれぞれ計算せよ.

b) h を正の実数とするとき，$\sqrt{1+h}$ を $f(0)+f'(0)h+\dfrac{f''(0)}{2!}h^2$ で近似したときの誤差を評価せよ.

c) $\sqrt{104}=10\sqrt{1+\frac{1}{25}}$ という表示と，b) の近似式を応用して $\sqrt{104}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{104}$ の値とは小数第何位まで一致するといえるか.

$\boxed{3}$ a) 関数 $f(x)=\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}$ の $x=0$ のまわりでの漸近展開を 4 次の項まで求めよ.

ここで，次の漸近展開の公式は自由に用いてよい.

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

b) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\log(1+x)}$ を求めよ

$\boxed{4}$ つぎの 2 変数関数のそれぞれについて，2 階の偏微分までをすべて計算せよ.

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

b) $f(x,y)=(x-y)e^{-xy}$

$\boxed{5}$ 関数 $f(x,y)=x^3-3x^2-6xy-3y^2-3x$ の臨界点（すべての偏微分が 0 になる点）をすべてもとめ，各臨界点において極大・極小を判定せよ.

$\boxed{6}$ 底面が 1 辺 a の正方形で高さが h である上面に蓋のない直方体の缶がある.

a) この缶を作るのに使用する材料の面積を S とするとき，S を a と h で表わせ.

b) 材料の面積 S が一定値であるという条件の下で，容積 V が最大となるような a と h をラグランジュの乗数法で求めよ.