2023 年度 後期　　微分積分 II　期末試験 略解　　2024 年 1 月 16 日

担当 鍬田 政人

$\boxed{1}$ a) $1-2x=t$ とおくと，$x=\dfrac{1-t}{2}$，$dx=-\dfrac{1}{2}dt$ だから，

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-2x} &= \int \frac{1-t}{2}\sqrt{t}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{4}\int (t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})\,dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C = \frac{1}{30}(3t-5)t^{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{1}{30}(3(1-2x)-5)(1-2x)^{\frac{3}{2}}+C = -\frac{1}{15}(1+3x)(1-2x)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

b) $f(x)=2x+1$ とし，$g'(x)=e^{-2x}$ となるように，$g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$ とおく．

$$\begin{aligned}\int (2x+1)e^{-2x}\,dx &= (2x+1)\times\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int (2x+1)'\times\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx \\ &= -\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}+\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}(2x+1)e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+C \\ &= -(x+1)e^{-2x}+C\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ a) $f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$，$f'''(x)=\dfrac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$.

b) 高次微分による近似式で，$n=3$ の場合を用いると，

$$\sqrt{1+h}=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2!}h^2+R_3(h)=1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+R_3(h)$$

と書ける．ここで，$x\geqq 0$ のとき，$(1+x)^{5/2}\geqq (1+0)^{5/2}=1$ であるから，

$$0\leqq f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\leqq\frac{3}{8(1+0)^{5/2}}=\frac{3}{8}$$

が成り立つ．したがって，誤差を $R_3(\alpha)$ について，次の不等式（評価式）が成り立つ．

$$0\leqq R_3(h)\leqq\frac{\frac{3}{8}}{3!}h^3=\frac{1}{16}h^3.$$

c) $\sqrt{104}=10\sqrt{1+\frac{1}{25}}$ と書けるので，

$$\sqrt{104}=10\sqrt{1+\frac{1}{25}}\fallingdotseq 10\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{25}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{25}\right)^2\right)=10.198$$

と近似でき，その誤差は，

$$0\leqq 10\,R_3\left(\frac{1}{25}\right)\leqq 10\frac{1}{16}\left(\frac{1}{25}\right)^3\fallingdotseq 0.000040\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$10.198\leqq\sqrt{104}\leqq 10.198+0.000040=10.198040\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{104}$ の小数点以下第 4 位までの値は 10.1980 であることがわかる．

$\boxed{3}$ a) $(1+x)^{\alpha}$ の展開式の $n=4$ 場合を用いると，$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3-\dfrac{5}{128}x^4+o(x^4)$
となる．ここで，x をそれぞれ $2x$，$-2x$ に置き換えることにより，

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x} &= 1+\frac{1}{2}(2x)-\frac{1}{8}(2x)^2+\frac{1}{16}(2x)^3-\frac{5}{128}(2x)^4+o(x^4)\\ &\quad -\left(1+\frac{1}{2}(-2x)-\frac{1}{8}(-2x)^2+\frac{1}{16}(-2x)^3-\frac{5}{128}(-2x)^4+o(x^4)\right)\\ &= 2x+x^3+o(x^4) \qquad [o(x^4)-o(x^4)=0 \text{ とはならないことに注意.}]\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x^3+o(x^4)}{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{2}x+o(x^1)}=\frac{2+0+0}{1-0+0}=2$

$\boxed{4}$ a) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

$\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-y^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{xy}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-x^2}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$

b) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(1-xy+y^2)e^{-xy}$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-(1-xy+x^2)e^{-xy}$.

$\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-y(2-xy+y^2)e^{-xy}$, $\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=(-2x+2y+x^2y-xy^2)e^{-xy}$,

$\displaystyle\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x(2-xy+x^2)e^{-xy}$

$\boxed{5}$ まず，$f(x,y)$ の x,y に関する偏微分を計算し，それらがすべて 0 になるような x,y の組をすべて求める．

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-6x-6y-3=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-6x-6y=0\end{cases}$$

2 番目の式から $y=-x$ が得られるので，それを 2 番目の式に代入すると，

$$3x^2-6x+6x-3=3(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

よって，偏微分がともに 0 になるような (x,y) は，$(x,y)=(1,-1),(-1,-1)$ の 2 つ.
次に，$D(x,y)$ を計算すると

$$D(x,y)=6x-6\times(-6)-(-6)\times(-6)=-36x$$

$(x,y)=(1,-1)$ のとき，$D(1,-1)=-36$ なので，$(1,-1)$ は $f(x,y)$ の鞍点.
$(x,y)=(-1,1)$ のとき，$D(-1,1)=36>0$ かつ，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)=-12<0$ なので，$f(x,y)$ は $(-1,1)$ で極大.

$\boxed{6}$ a) 上面に蓋がないので，材料の面積は $S=a^2+4ah$.

b) 容積 V は $V=a^2h$ なので，材料の面積 S が一定値であるとして，ラグランジュ関数を $L(a,h,\lambda)=a^2h-\lambda(a^2+4ah-S)$ と定める．偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial a}=2ah-\lambda(2a+4h)=0 & \cdots ①\\ \frac{\partial L}{\partial h}=a^2-\lambda(4a)=0 & \cdots ②\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(a^2+4ah-S)=0 & \cdots ③\end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} ① \text{ より} & 2ah=\lambda(2a+4h) & \cdots ①'\\ ② \text{ より} & a^2=\lambda(4a) & \cdots ②'\end{array}$$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より} \quad \frac{2ah}{a^2}=\frac{\lambda(2a+4h)}{\lambda(4a)} \Rightarrow \frac{2h}{a}=\frac{a+2h}{2a} \Rightarrow a=2h$$

$a=2h$ を ③ に代入すると，$-(a^2+4ah-S)=0$ より，$12h^2=S$．したがって，$h=\sqrt{S/12}$.
$a=2\sqrt{S/12}=\sqrt{S/3}$.