

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1 部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

において  $f(x) = (x-1)$ ,  $g'(x) = e^x$  とおいて  $\int (x-1)e^x dx$  を求めよ.

$f'(x) = 1$ ,  $g(x) = e^x$  とし,

$$\begin{aligned} \int (x-1)e^x dx &= (x-1)e^x \\ &= (x-1)e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= (x-1)e^x - e^x + C = (x-2)e^x + C \end{aligned}$$

2 部分積分の公式において  $f(x) = \log x$ ,  $g'(x) = x$  とおいて  $\int x \log x dx$  を求めよ.

$f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$  とし,

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \log x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

3 部分積分を繰り返し用いることにより  $\int x^2 e^{-x} dx$  を求めよ.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= x^2(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \left( x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx \right) \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C \end{aligned}$$

4  $\int \log x dx$  を部分積分で計算する方法を参考にして  $\int (\log x)^2 dx$  を求めよ.

$f(x) = (\log x)^2$ ,  $g(x) = x$  とおくと,  $f'(x) = 2 \log x \cdot (\log x)' = \frac{2}{x} \log x$ ,  $g'(x) = 1$  であり,

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= (\log x)^2 \cdot x - \int \frac{2}{x} \log x \cdot x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \quad (\text{ここで, } f(x) = \log x, g(x) = x \text{ とおく}) \\ &= x(\log x)^2 - 2 \left( x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right) + C \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C \end{aligned}$$

5 定積分の部分積分の公式  $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$  を用いて次の定積分を求めよ.

a)  $\int_0^1 xe^{-2x} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{-2x} dx &= \left[ x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \left[ \frac{1}{4}e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b)  $\int_1^e x^2 \log x dx$

$f(x) = \log x, g(x) = \frac{1}{3}x^3$  とおくと,

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \log x dx &= \left[ \frac{1}{3}x^3 \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}e^3 - \left[ \frac{1}{9}x^3 \right]_1^e \\ &= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

6 a) 置換積分を用いて  $\int \frac{\log x}{x} dx$  を求めよ.

$\log x = t$  とおくと,  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$  だから,  $\frac{1}{x} dx = dt$ . したがって,

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

b) 部分積分を用いて  $\int \frac{\log x}{x} dx$  を求めることができるか?

$f(x) = \log x, g'(x) = \frac{1}{x}$  とおくと,  $f'(x) = \frac{1}{x}$  であり,  $g(x) = \log x$  とできるから,

$$\int \frac{\log x}{x} dx = (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x} dx$$

ここで, 左辺の  $\int \frac{\log x}{x} dx$  を  $F(x) + C_1$  とおき, 右辺の  $\int \frac{\log x}{x} dx$  を  $F(x) + C_2$  とおくと,

$$F(x) + C_1 = (\log x)^2 - F(x) - C_2$$

これを  $F(x)$  について解くと,

$$F(x) = \frac{1}{2}(\log x)^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$$

これは,

$$\int \frac{\log x}{x} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

を意味する.