入学年度		学部	学 科		組		番	号		検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

1 不定積分 $\int x\sqrt{3x-1}\,dx$ を以下の方法で求めよ．

a) $3x-1=t$ とおいて求めよ．

$3x-1=t$ とおくと，$x=\frac{t}{3}+\frac{1}{3}$．このとき，$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$．

$$\int x\sqrt{3x-1}\,dx=\int\frac{t+1}{3}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{9}\int\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{45}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}t^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおいて求めよ．

$\sqrt{3x-1}=t$ とおくと，$x=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{3}$．このとき，$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{3}$．

$$\int\frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx=\int\frac{t(t^2+1)}{3}\cdot\frac{2t}{3}\,dt=\frac{2}{9}\int(t^4+t^2)\,dt=\frac{2}{45}t^5+\frac{2}{27}t^3+C$$
$$=\frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$

2 次の不定積分を求めよ．

a) $\int x(3x+2)\,dx$　　b) $\int\frac{1}{x\log x}\,dx$

a) $\int x(3x+2)\,dx=\int(3x^2+2x)\,dx=x^3+x^2+C$

b) $t=\log x$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$．これより形式的に $dt=\frac{1}{x}dx$．

$$\int\frac{1}{x\log x}\,dx=\int\frac{1}{\log x}\cdot\left(\frac{1}{x}dx\right)=\int\frac{1}{t}\,dt=\log t+C=\log(\log x)+C$$

c) $\int(x+1)e^x\,dx$　　d) $\int\log(x+1)\,dx$

c) $u=x+1,\ v'=e^x$ とおいて，部分積分 $\int uv'=uv-\int u'v$ を用いる．このとき $v=e^x$ だから

$$\int(x+1)e^x\,dx=(x+1)e^x-\int1\cdot e^x\,dx=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$$

d) $u=\log(x+1),\ v'=1$ とおいて，部分積分を用いる．このとき $v=x$ となることに注意．

$$\int\log(x+1)\,dx=x\log(x+1)-\int x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx=x\log(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}dx\right)dx$$
$$=x\log(x+1)-(x-\log x)+C=(x+1)\log(x+1)-x+C$$

3 $\sqrt{17}=4\sqrt{1+\frac{1}{16}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の 2 次近似の式を用い $\sqrt{17}$ の近似値を求めよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{17}$ の値とは小数第何位まで一致するかを答えよ．

$f(x)=\sqrt{1+x}$ とおいて，高次微分による近似式で $n=3$，$h=\frac{1}{16}$ とする．まず，近似値は $\sqrt{1+h}=1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+R_3(h)$ より，

$$\sqrt{17}=4\sqrt{1+\frac{1}{16}}\fallingdotseq4+\frac{4}{2}\frac{1}{16}-\frac{4}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^2=4.123046875$$

近似の誤差は，$0\leqq f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\leqq\frac{3}{8(1+0)^{5/2}}=\frac{3}{8}$ より，

$$0\leqq4R_3\left(\frac{1}{16}\right)\leqq4\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}\left(\frac{1}{16}\right)^3\fallingdotseq0.0000610352\ldots$$

と評価できる．すなわち，

$$4.123046875\leqq\sqrt{17}\leqq4.123046875+0.0000610352\ldots=4.123107910\ldots$$

となる．これより，$\sqrt{17}$ の小数点以下第 3 位までの値は 4.123 であることがわかる．（小数第 4 位は 0 または 1 であることもわかる．）

4 漸近展開を用いて次の極限を求めよ．

a) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$

$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ であるが，
この式で x を $-x$ に置き換えて，$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ も成り立つ．したがって，

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)=x+o(x^2).$$

一方，$e^x=x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ だから，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x^2)}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{1+o(x)}{1+\frac{x}{2}+o(x)}=1$$

b) $\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x+\log(1-x)}$

$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$，$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ より

$$\begin{cases}\log(1+x)+\log(1-x)=-x^2+o(x^3)\\ x+\log(1-x)=x+\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\end{cases}$$

したがって，

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x+\log(1-x)}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+o(x^3)}{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{-1+o(x)}{-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+o(x)}=\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$$

$\boxed{5}$ つぎの 2 変数関数について，各変数に 2 階までの偏微分をすべて計算せよ．

a) $f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + 3xy^3 - y^4 + 3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8xy^2 + 3y^3,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -8x^2y + 9xy^2 - 4y^3.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 8y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -16xy + 9y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -8x^2 + 18xy - 12y^2$$

b) $f(x,y) = (x + 2y^2 + 1)^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3(x + 2y^2 + 1)^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y(x + 2y^2 + 1)^2.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6(x + 2y^2 + 1)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 24y(x + 2y^2 + 1)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12(x+10y^2+1)(x+2y^2+1)$$

c) $f(x,y) = x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{3}{5}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{6}{25}x^{-\frac{8}{5}}y^{\frac{3}{5}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{6}{25}x^{-\frac{3}{5}}y^{-\frac{2}{5}}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{6}{25}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{7}{5}}$$

d) $f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(1 - x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(1 + x^2 - y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$\boxed{6}$ 次の関数の臨界点を求め，各臨界点において極大・極小を判定せよ．

a) $f(x,y) = x^3 - 6x^2 + x^2y^2 - y^2$

まず，臨界点（偏微分がともに 0 になる点）を求めるために，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 12x + 2xy^2 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y - 2y = 0$$

を解く．2 番目の式から $y(x-1)(x+1) = 0$ が得られるので，$y = 0$，$x = 1$，$x = -1$ をそれぞれ最初の式に代入し，$(x,y) = (0,0)$，$(4,0)$，$(1, \pm 3\sqrt{2}/2)$，$(-1, \pm\sqrt{30}/2)$ を得る．次に $D(x,y)$ を計算し，極大・極小の判定法を用いる．

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = (6x - 12 + 2y^2)(2x^2 - 2) - (4xy)^2$$
$$= 4(3x^3 - 6x^2 - 3y^2x^2 - y^2 - 3x + 6)$$

- $D(0,0) = 24 > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -12 < 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大．
- $D(4,0) = 360 > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 12 > 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(4,0)$ で極小．
- $D(1, \pm 3\sqrt{2}/2) = -72 < 0$ なので，$(1, \pm 3\sqrt{2}/2)$ は鞍点（峠点）．
- $D(-1, \pm\sqrt{30}/2) = -120 < 0$ なので，$(-1, \pm\sqrt{30}/2)$ は鞍点（峠点）．

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$

まず，臨界点を求めると，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0$$
$$\iff \quad 1 - x^2 + y^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad -2xy = 0$$
$$\iff \quad (x,y) = (1,0) \quad \text{または} \quad (-1,0)$$

$D(x,y)$ を計算し，極大・極小を判定すると以下のようになる．

- $D(1,0) = \dfrac{1}{4} > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(1,0)$ で極大．
- $D(-1,0) = \dfrac{1}{4} > 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = \dfrac{1}{2} > 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(-1,0)$ で極小．

$\boxed{7}$ 底面が 1 辺 a の正方形で高さが h である上面に蓋のない直方体の缶がある．

a) この缶を作るのに使用する材料の面積を S とするとき，S を a と h で表わせ．

$S(a,h) = (\text{底面積}) + (\text{側面積}) = a^2 + 4ah.$

b) 材料の面積 S が一定値であるという条件の下で，容積 V が最大となるような a と h をラグランジュの乗数法で求めよ．

材料の面積が一定値 S_0 であるとして，$L(a,h,\lambda) = V(a,h) - \lambda(S(a,h) - S_0)$ とおく．$V(a,h) = a^2h$ であるから，

$$L(r,h,\lambda) = a^2h - \lambda(a^2 + 4ah - S_0)$$

偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a} = 2ah - \lambda(2a + 4h) = 0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = a^2 - \lambda(4a) = 0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(a^2 + 4ah - S_0) = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より $\;2ah = \lambda(2a + 4h) \quad \cdots ①'$

② より $\;a^2 = \lambda(4a) \quad \cdots ②'$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \quad \frac{2ah}{a^2} = \frac{\lambda(2a + 4h)}{\lambda(4a)} \;\Rightarrow\; \frac{2h}{a} = \frac{a + 2h}{2a} \;\Rightarrow\; a = 2h$$

$a = 2h$ を ③ に代入すると，$-(a^2 + 4ah - S_0) = 0$ より，$12h^2 = S_0$．したがって，$h = \sqrt{S_0/12}$．$a = 2\sqrt{S_0/12} = \sqrt{S_0/3}$．

（答）$a = \sqrt{S_0/3}, h = \sqrt{S_0/12}$ のとき体積 V は最大になる．