入学年度	学部	学 科	組	番　号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

1 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ を次の二通りの方法で計算せよ.

a) $\sqrt{2x+1}=t$ とおく.

$\sqrt{2x+1}=t$ より，$2x+1=t^2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}(t^2-1)$

これより，$\dfrac{dx}{dt}=t$ となるので，$dx=t\,dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{(t^2-1)-1}{t}t\,dt = \int (t^2-2)\,dt = \frac{1}{3}t^3-2t+C\\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3-2\sqrt{2x+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}-2\sqrt{2x+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}+C\end{aligned}$$

b) $2x+1=t$ とおく.

$2x+1=t$ より，$x=\frac{1}{2}(t-1)$

また，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}$ より，$dx=\dfrac{1}{2}\,dt$.

したがって，

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{(t-1)-1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \int \left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C\\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3-2\sqrt{2x+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}-2\sqrt{2x+1}+C\\ &= \frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}+C\end{aligned}$$

2 $x^3-4=u$ とおくことにより，$\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3-4}\,dx$ を求めよ.

$u=x^3-4$ とすると，$\dfrac{du}{dx}=3x^2$ だから，$x^2\,dx=\dfrac{1}{3}\,du$.

したがって，

$$\int x^2\sqrt{x^3-4}\,dx = \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{3}\,du = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3-4}\right)^3+C$$

3 $1-e^x=u$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$ を求めよ.

$u=1-e^x$ とすると，$\dfrac{du}{dx}=-e^x$ だから，$e^x\,dx=-du$.

したがって，

$$\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx = \int \frac{1}{u}(-du) = -\log u + C = -\log(1-e^x)+C$$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_0^3 (5x+2)\sqrt{x+1}\,dx$ を求めよ．

$u=\sqrt{x+1}$ とすると，$x=u^2-1$ だから，$\dfrac{dx}{du}=2u \Rightarrow dx=2u\,du$.
したがって，

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (5x+2)\sqrt{x+1}\,dx &= \int \big(5(u^2-1)+2\big)\,u\cdot 2u\,du = \int (10u^4-6u^2)\,du \\
&= \Big[2u^5-2u^3\Big]_{x=0}^{x=3} \\
&= \Big[2\big((x+1)^2\sqrt{x+1}-(x+1)\sqrt{x+1}\big)\Big]_0^3 \\
&= \Big[2x(x+1)\sqrt{x+1}\Big]_0^3 \\
&= 2\times 3\times(3+1)\times\sqrt{3+1}-0 \\
&= 48
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $\log x = t$ とおいて $\displaystyle\int_e^{e^3}\frac{dx}{x\log x}$ を求めよ．

$\log x = t$ とすると，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x} \Rightarrow dt=\dfrac{1}{x}\,dx$.
したがって，

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^3}\frac{dx}{x\log x} &= \int_{x=e}^{x=e^3}\frac{1}{t}\,dt = \Big[\log t\Big]_{x=e}^{x=e^3} \\
&= \Big[\log(\log x)\Big]_e^{e^3} \\
&= \log\big(\log e^3\big)-\log\big(\log e\big) \\
&= \log 3-\log 1 \\
&= \log 3
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ a) 等式 $\dfrac{1}{x^2(x+3)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+3}$ が成り立つように，定数 a，b，c の値を定めよ．

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+3}$ を通分すると $\dfrac{ax(x+3)+b(x+3)+cx^2}{x^2(x+3)}=\dfrac{(a+c)x^2+(3a+b)x+3b}{x^2(x+3)}$
これが $\dfrac{1}{x^2(x+3)}$ に等しいことから，任意の x について $(a+c)x^2+(3a+b)x+3b=1$ が成り立つ．
これより，

$$\begin{cases} a+c &= 0 \\ 3a+b &= 0 \\ 3b &= 1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-\dfrac{1}{9}, b=\dfrac{1}{3}, c=\dfrac{1}{9}$.

b) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2(x+3)}$ を求めよ．

a) を用いて，

$$\begin{aligned}
\int\frac{dx}{x^2(x+3)} &= \int\Big(-\frac{1}{9x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{9(x+3)}\Big)\,dx \\
&= -\frac{1}{9}\log x-\frac{1}{3x}+\frac{1}{9}\log(x+3)+C
\end{aligned}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)