

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1 $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - x - 2$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 2x - 4$$

b) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ. また, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f'(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1 = (4x + 1)(x - 1)(x + 1) \text{ だから,}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, -1, -\frac{1}{4}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < -\frac{1}{4}, 1 < x$$

c) $f''(x) = 0$ となる x を求めよ. また, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f''(x) = 12x^2 + 2x - 4 = 2(3x + 2)(2x - 1) \text{ だから,}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} < x$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ. (増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.)

x	...	-1	...	$-\frac{2}{3}$...	$-\frac{1}{4}$...	$\frac{1}{2}$...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$		↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘	極小

2 $f(x) = (x - 1)e^{x+1}$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x - 1)'e^{x+1} + (x - 1)(e^{x+1})' = e^{x+1} + (x - 1)e^{x+1} = xe^{x+1}$$

$$f''(x) = (x)'e^{x+1} + x(e^{x+1})' = e^{x+1} + xe^{x+1} = (x + 1)e^{x+1}$$

b) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ. また, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

e^{x+1} は常に正の値をとることから,

$$f'(x) = xe^{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) = xe^{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

c) $f''(x) = 0$ となる x を求めよ. また, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f''(x) = (x + 1)e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f''(x) = (x + 1)e^{x+1} > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ. (増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.)

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$		↘	-2	↘	-e

e) $f(x)$ が極大・極小となる点, および変曲点を求めよ.

極大となる点: なし

極小となる点: $x = 0$ 参考: 極小値: $-e$, 極小点: $(0, -e)$

変曲点: $(-1, -2)$

3) $f(x) = 4xe^{-\frac{x^2}{2}}$ とする.

a) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ と 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x)'e^{-\frac{x^2}{2}} + 4x(e^{-\frac{x^2}{2}})' = 4e^{-\frac{x^2}{2}} + 4xe^{-\frac{x^2}{2}}(-\frac{x^2}{2})' = 4e^{-\frac{x^2}{2}} - 4x^2e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= 4(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4(1-x^2)'e^{-\frac{x^2}{2}} + 4(1-x^2)(e^{-\frac{x^2}{2}})' = -8xe^{-\frac{x^2}{2}} - 4x(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= 4x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

b) $f'(x) = 0$ となる x と, $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$e^{-\frac{x^2}{2}}$ は常に正だから,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, -1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

c) $f''(x) = 0$ となる x と, $f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < 0, x > \sqrt{3}$$

d) $f(x)$ の増減表を完成させよ。(増減だけでなくグラフの凹凸も調べること.)

x	...	$-\sqrt{3}$...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$		↘ 変曲点	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘

e) $f(x)$ が極大・極小となる点, および変曲点を求めよ.

極大となる点: $x = 1$

極小となる点: $x = -1$

変曲点: $(-\sqrt{3}, -4\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}), (0, 0), (\sqrt{3}, 4\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$

f) $e^{-\frac{1}{2}} \doteq 0.607, e^{-\frac{3}{2}} \doteq 0.223, e^{-2} \doteq 0.135, e^{-\frac{9}{2}} \doteq 0.011$ であるとして, $f(\pm 1), f(\pm\sqrt{3}), f(\pm 2), f(\pm 3)$ の値を概算せよ.

$$f(\pm 1) = \pm 2.428, f(\pm\sqrt{3}) = 1.545, f(\pm 2) = 1.08, f(\pm 3) = 0.132$$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ であることが知られている. これと, ここまでの結果を用いて, $f(x)$ のグラフをなるべく丁寧に描け.

