

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1)  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$  とする.

a) 関数  $f(x)$  の定義域を求めよ.

定義域: (根号内)  $\geq 0$  より,  $-2 \leq x \leq 2$

b) 導関数  $f'(x)$  を求めよ.

$$f'(x) = (x)'\sqrt{4-x^2} + x(\sqrt{4-x^2})' = \sqrt{4-x^2} + x \frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c)  $f'(x) = 0$  となる  $x$  と,  $f'(x) > 0$  となる範囲を求めよ.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x^2) > 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

d)  $f(x)$  が定義域内での増減表を書け.

$x$	-2	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(x)$	$\times$	-	0	+	0	-	$\times$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

e)  $f(x)$  の定義域内での最大値, 最小値を求めよ.

最大値: 2 ( $x = \sqrt{2}$ )

最小値: -2 ( $x = -\sqrt{2}$ )

2) 直円柱の形をした缶詰の容器の容積が  $V$  で一定であるとき, その表面積  $S$  を最小にしたい.

a) 底面の半径を  $r$ , 高さ  $h$  とするとき,  $S$  と  $V$  をそれぞれ  $r$  と  $h$  で表せ.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V = \pi r^2 h$$

b)  $S$  を  $V$  と  $r$  で表せ.

$$V = \pi r^2 h \text{ より, } h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

これを  $S$  の式に代入し,

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

c)  $S$  を  $r$  の関数とみて,  $\frac{dS}{dr}$  を計算し,  $S$  の増減表を書け.

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d}{dr} \left( 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \right) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 - V = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$r$  は正の範囲を動くので, 増減表は右の通り.

$r$	0	...	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	...
$\frac{dS}{dr}$	$\times$	-	0	+
$S$	$\times$	$\searrow$	最小	$\nearrow$

d)  $S$  が最小になるときの  $r$  の値を求めよ. また, そのときの  $h$  の値も求めよ.

増減表より,  $S$  は  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  のとき最小になる.

$$\text{このとき, } h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi} \left( \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^2 = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} (= 2r).$$

(答) 半径  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ , 高さ  $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$  のとき.

3)  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  とする.

a)  $f(x)$  の定義域を述べよ.

$\log$  の真数条件より,  $x > 0$  が必要. また, このとき, 分母  $\neq 0$  だから, 定義域は  $x > 0$ .

b) 関数  $f(x)$  の増減表を書き, 増減を調べよ.

$$f'(x) = \frac{(\log x)'x - (\log x)(x)'}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e, \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e.$$

$x$	0	...	$e$	...
$f'(x)$	$\times$	+	0	-
$f(x)$	$\times$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

極大

c) b) の結果を用い,  $\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}$  を示せ.

$e = 2.718\cdots < \pi = 3.14159\cdots$  だから, 上の増減表より  $f(e) > f(\pi)$ .

これより直ちに,  $\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}$  が導かれる.

d) c) の結果を用い,  $\pi^e$  と  $e^\pi$  のどちらが大きいかを示せ. [ヒント:  $\log \pi^e$  と  $\log e^\pi$  の大きさを比較せよ.]

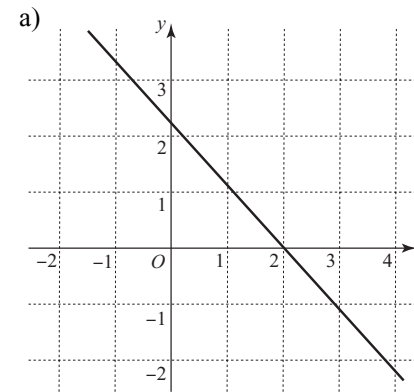
$$\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e} \text{ の両辺に } e\pi (> 0) \text{ をかけて, } e \log \pi < \pi \log e.$$

さらに, 対数の性質を用いて  $\log \pi^e < \log e^\pi$ .

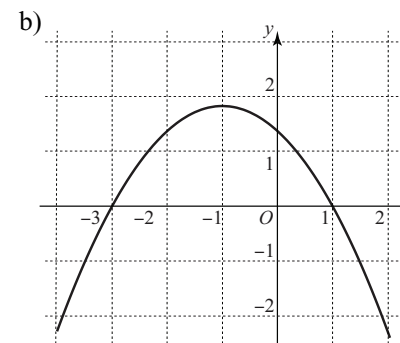
ここで, 対数の底  $e$  は 1 より大きいから,  $\log a < \log b \Leftrightarrow a < b$  が成り立つ.

したがって,  $\pi^e < e^\pi$ .

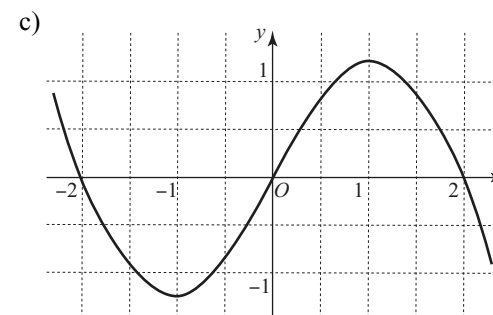
4) 次の各々のグラフは導関数  $y = f'(x)$  のグラフの概形を示したものである. これをもとに,  $f'(x)$  と  $f''(x)$  の値の正負を読み取り, 関数  $f(x)$  の増減表を書いて,  $y = f(x)$  のグラフの凹凸を調べ, 極大・極小となる点, 変曲点をもとめよ. (凹凸は曲がった矢印  $\nearrow$   $\nwarrow$   $\searrow$   $\swarrow$  で表すこと.)



$x$	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-
$f(x)$	$\nwarrow$	極大	$\swarrow$



$x$	...	-3	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	$\nwarrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nwarrow$	極大	$\swarrow$



$x$	...	-2	...	-1	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	$\nwarrow$	極大	$\swarrow$	変曲点	$\nwarrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nwarrow$	極大	$\swarrow$