

1

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 2-x & (1 \leq x \leq 2) \\ 0 & (x < 0, 2 < x) \end{cases}$$

で定義される  $f(x)$  を確率密度関数とする確率変数  $X$  について  $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$ , 平均  $\mu = E(X)$ , 標準偏差  $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$  をそれぞれ求めよ.

| 入学年度 | 学部 | 学科 | 組 | 番号 | 検 | フリガナ |
|------|----|----|---|----|---|------|
|      | B  | 1  |   |    |   | 氏名   |

2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義される  $f(x)$  を確率密度関数とする確率変数  $X$  について  $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$ , 平均  $\mu = E(X)$ , 標準偏差  $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$  をそれぞれ求めよ.

3] あるハンバーガー店のドライブスルーでのお客さんの到着間隔  $Y$  (分) は次の確率密度関数で表される指数分布に従っているとすると、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- a) 平均到着間隔はいくらか。  
b) 5分間車が来ない確率を求めよ。ただし  $e^{-5/3} \approx 0.189$  である。

[微分積分を履修していない人へ]  $e$  とは、 $\pi$  と同様にある実数の定数であって、その値は  $e = 2.718281828459045\dots$  であり、「Napierの数」とか「自然対数の底」と呼ばれる。 $e$  のもつ一番大事な性質は、指数関数  $f(x) = e^x$  を考えると、その導関数が  $f'(x)$  が  $e^x$  に一致すること、すなわち

$$(e^x)' = e^x$$

であることである。 $2^x$  や  $10^x$  の導関数はこのように簡単には表されず、微積分がかかわる理論においては指数関数は通常  $e$  を底とする指数関数  $e^x$  を用いる。

連鎖律 (合成関数の微分公式) :  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$  を用いれば、 $a$  を定数とすると、

$$(e^{ax})' = ae^{ax}, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

が成り立つ。また、 $a$  が正数のとき、 $x$  を大きくするにしたがって  $e^{-ax}$  は急激に減少する関数で、どんな自然数  $n$  に対しても  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-ax} = 0$  となる。これより、

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \left[ \frac{-1}{a} e^{-ax} \right]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{a} e^{-ax} \right) - \left( \frac{-1}{a} e^0 \right) = \frac{1}{a}$$

が成り立つ。また、部分積分の公式 :  $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$  により、

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx = \left[ x \cdot \frac{-1}{a} e^{-ax} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{a} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2}$$

が成り立つ。