入学年度			学部	学 科		組		番	号		検	フリガナ	
			B		1							氏 名	

1　２つの壺があり，片方の壺1には赤い球が9個と白い球が1個，もう一方の壺2には赤い球1個と白い球が9個入っている．いま無作為に壺を選び，1個の球を取り出してその色を調べ，その球をとり出した壺に戻して，もう一度同じ壺から球を取り出すという試行を考える．

この試行において「まず壺1を選び，最初に選んだ球が赤，2度目に選んだ球が白である」という結果を $(1, R, W)$ と表すこととして，標本空間 Ω を

$$\Omega = \{(1,R,R),(1,R,W),(1,W,R),(1,W,W),\\ (2,R,R),(2,R,W),(2,W,R),(2,W,W)\}$$

と定める．

a) この確率モデルにおいて，$P(\{(1,R,R)\}), P(\{(2,R,R)\})$ はそれぞれどのような値であるか．

$$P(\{(1,R,R)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{200}$$
$$P(\{(2,R,R)\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{200}$$

b)「最初に選んだ球は赤である」という事象を A，「2度目に選んだ球は赤である」という事象を B とする．A，B をそれぞれ外延的記法で表せ．

$$A = \{(1,R,R),(1,R,W),(2,R,R),(2,R,W)\}$$
$$B = \{(1,R,R),(1,W,R),(2,R,R),(2,W,R)\}$$

c)「最初に選んだ球は赤であり，2度目に選んだ球も赤である」という事象は $A \cap B$ と表せるが，その確率 $P(A \cap B)$ をもとめよ．

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(\{(1,R,R),(2,R,R)\}) \\ &= P(\{(1,R,R)\}) + P(\{(2,R,R)\}) \\ &= \frac{81}{200} + \frac{1}{200} = \frac{82}{200} = \frac{41}{100} \end{aligned}$$

d) 事象 A をあらためて標本空間とみなして Ω_A とおき，新たな確率モデルを考える．このとき「2度目に選んだ球も赤である」という事象を Ω_A の事象，すなわち Ω_A の部分集合とみたとき，これを外延的記法で表せ．またこの事象の確率はこの新たなモデルでどのようになるか．

「2度目に選んだ球も赤である」という事象を B とおくと，

$$B = \{(1,R,R),(2,R,R)\} \subset \Omega_A = \{(1,R,R),(1,R,W),(2,R,R),(2,R,W)\}$$

この新たなモデルにおける確率を P_A と書くと，

$$P_A(B) = \frac{P(\{(1,R,R),(2,R,R)\})}{P(A)} = \frac{\frac{41}{100}}{\frac{81}{200}+\frac{9}{200}+\frac{1}{200}+\frac{9}{200}} = \frac{41}{50}$$

2　ある大学の学生の数学と英語の成績分布は次の表の通りであった．

数学＼英語	A	B	C
A	15%	15%	5%
B	10%	20%	10%
C	5%	10%	10%

この学生の中から無作為に1人を選んで，その学生の数学と英語の成績を尋ねるという試行において，標本空間 Ω を $\Omega = \{(X,Y) \mid X$ は数学の成績，Y は英語の成績$\}$ と設定する．そして，数学の成績が A であるという事象を M，英語の成績が A であるという事象を E とする．

a) 事象 M をあらためて標本空間とみなし，Ω_M とおく．Ω_M を外延的記法で表せ．

$$\Omega_M = \{(A,A),(A,B),(A,C)\}$$

b) Ω_M を標本空間とするとき，Ω_M の各事象 N についてその確率を $P_M(N)$ と書く．事象 $\{(\mathrm{A},\mathrm{A})\}$，$\{(\mathrm{A},\mathrm{B})\}$，$\{(\mathrm{A},\mathrm{C})\}$ の確率 $P_M(\{(\mathrm{A},\mathrm{A})\})$，$P_M(\{(\mathrm{A},\mathrm{B})\})$，$P_M(\{(\mathrm{A},\mathrm{C})\})$ をそれぞれ求めよ

$$P_M(\{(A,A)\}) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$
$$P_M(\{(A,B)\}) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$
$$P_M(\{(A,B)\}) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

c) こんどは事象 E を標本空間とみなし，Ω_E とする．Ω_E を外延的記法で表せ．

$$\Omega_E = \{(A,A),(B,A),(C,A)\}$$

d) ある学生を選んだとき，その学生の英語の成績は A であった．この学生の数学の成績が C である確率を求めよ．

英語の成績が A である中での確率だから，標本空間 Ω_E で考える．

Ω_E の中で数学の成績が C である確率は　$P_E(\{(C,A)\}) = \dfrac{5}{15+10+5} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$

$\boxed{3}$ ある会社で同じ製品を 2 つの工場 X, Y で製造していて，製品に不良品が含まれる確率は，工場 X では 4%，工場 Y では 5% であるという．いま，工場 X の製品 1000 個と工場 Y の製品 800 個がある．

a) 下の表を完成させよ．

工場 \ 良・不良	良品	不良品	計
X	960 個	40 個	1000 個
Y	760 個	40 個	800 個
計	1720 個	80 個	1800 個

これら 1800 個の製品の中から無作為に 1 個を取り出すとき，取り出した製品が X で製造された良品であることを $(X, \text{良})$ などと表すことにし，この試行の標本空間を $\Omega = \{(X,\text{良}), (X,\text{不良}), (Y,\text{良}), (Y,\text{不良})\}$ とおく．

b) 取り出した製品が工場 X の良品である確率 $P(\{(X, \text{良})\})$ を求めよ．

上の表より，製品は全部で 1800 個あり，X で製造された良品は 960 個あるから，

$P(\{(X, \text{良})\}) = \dfrac{960}{1800} = \dfrac{8}{15}$

c) 取り出した製品が良品であるという事象を A とする．A を外延的記法で表し，$P(A)$ を求めよ．

上の表より，製品は全部で 1800 個あり，良品は 1720 個あるから，

$P(A) = \dfrac{1720}{1800} = \dfrac{43}{45}$

d) これら 1800 個の製品の中から 1 個を取り出したとき，それは良品であった．このとき，この製品が工場 X で生産されていた確率を求めよ．

上の表より，良品は全部で 1720 個あり，そのうち工場 X で生産されたものは 960 個あるから，

$P(A) = \dfrac{960}{1720} = \dfrac{24}{43}$

$\boxed{4}$ ある街でタクシーによるひき逃げ事故があった．その街にはそれぞれ緑色のタクシーと青色のタクシーを使っている 2 つのタクシー会社がある．その街で走っているタクシーの 85% は緑色のタクシーであり，15% は青色のタクシーである．目撃者はひき逃げタクシーは青色であったと証言した．その時間帯のその場所でその証言の識別力を調べたところ，緑色と青色のタクシーのそれぞれに対して，常に 80% は正しく識別できることが明らかになった．さて，事故を起こしたタクシーが本当に青色タクシーであった確率は求めたい．

a) 例えば，実際のタクシーの色が緑色なのに目撃者が青色であると識別する事象を (G, B) と表すことにし，標本空間 $\Omega = \{(G,G), (G,B), (B,G), (B,B)\}$ とする．このとき，$P(\{(G,G)\})$，$P(\{(G,B)\})$，$P(\{(B,G)\})$，$P(\{(B,B)\})$ をそれぞれ求めよ．

$P(\{(G,G)\}) = 0.85 \times 0.8 = 0.68$　$P(\{(G,B)\}) = 0.85 \times 0.2 = 0.17$

$P(\{(B,G)\}) = 0.15 \times 0.2 = 0.03$　$P(\{(B,B)\}) = 0.15 \times 0.8 = 0.12$

b) 次の表の空欄を埋めよ．

タクシー \ 証言	緑	青	計
緑	68 %	17 %	85 %
青	3 %	12 %	15 %
計	71 %	29 %	100 %

c)「目撃者が青色であると証言する」という事象を A とする．A を外延的記法で表し，その確率 $P(A)$ を求めよ．

$A = \{ (G,B), (B,B) \}$

$P(A) = 0.17 + 0.12 = 0.29$

d)「タクシーの色が青である」という事象を B とする．目撃者が青色であると証言したとき，実際にタクシーの色が青である確率 $P_A(B)$ を求めよ．

$P_A(B) = \dfrac{P(\{(B,B)\})}{P(A)} = \dfrac{0.12}{0.29} = \dfrac{12}{29} \fallingdotseq 0.414$

すなわち，事故を起こしたタクシーが青色のタクシーである確率は約 40 % 程度でしかなく，この目撃者の証言だけから青色のタクシーが事故を起こしたと断定するのは危険である．

［この問題の出典：市川伸一著「考えることの科学」（中公新書）］

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)