入学年度			学部	学科		組		番号			検	フリガナ
			B		1							氏名

[1] ある大学で学生 100 人の数学と英語の成績のを調べたところ次の表の通りであった．

数学 ＼ 英語	A	B	C
A	15 人	15 人	5 人
B	10 人	20 人	10 人
C	5 人	10 人	10 人

今，学生を 1 人無作為に選ぶという試行を行う．このときの標本空間 Ω は

$$\Omega = \{\, 学生_1, 学生_2, 学生_3, \ldots, 学生_{100} \,\}$$

のように表される 100 個の要素を持つ集合である．「無作為に選ぶ」ということは，起こり得るすべての結果は同様に確からしいと仮定していることを意味する．

a) 選ばれた学生の数学の成績が A であるという事象を M とする．M の要素の個数 $n(M)$ を上の表から求めよ．また，その確率 $P(M)$ を求めよ．

$n(M) = 15 + 15 + 5 = 35$

$P(M) = \dfrac{n(M)}{n(\Omega)} = \dfrac{35}{100} = 0.35$

b) 選ばれた学生の英語の成績が A であるという事象を E とする．前問と同様にして $P(E)$ を求めよ．

$n(E) = 15 + 10 + 5 = 30$

$P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{30}{100} = 0.3$

c) $P(M \cup E)$ および $P(M) + P(E) - P(M \cap E)$ をそれぞれ求め、両者が一致していることを示せ．

$n(M \cup E) = 15 + 15 + 5 + 10 + 5 = 50$ より，$P(M \cup E) = \frac{n(M \cup E)}{n(\Omega)} = \frac{50}{100} = 0.5$

一方，$P(M \cap E) = \frac{n(M \cap E)}{n(\Omega)} = \frac{15}{100} = 0.15$ だから，

$P(M) + P(E) - P(M \cap E) = 0.35 + 0.30 - 0.15 = 0.5.$

したがって，$P(M \cup E)$ と $P(M) + P(E) - P(M \cap E)$ は一致する．

d) 数学と英語の成績のうち，少なくとも一方は A ではないという事象を N とする．N の余事象を考えることにより $P(N)$ を確率を求めよ．

$N = \overline{M} \cup \overline{E}$ であるが，これは $N = \overline{M \cap E}$ とも表せる．したがって，$\overline{N} = M \cap E$

（「少なくとも一方は A ではない」の否定は「両方 A である」ことからも $\overline{N} = M \cap E$ が導かれる．）

$\therefore P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 1 - P(M \cap E) = 1 - 0.15 = 0.85$

[2] ある大学で，学生の数学と英語の成績の分布が次の表の通りであった．

数学 ＼ 英語	A	B	C
A	15%	15%	5%
B	10%	20%	10%
C	5%	10%	10%

この場合も，問題 1 と同様に標本空間 Ω を調査した学生全体の集合とすることもできるが，ここでは別の考え方で標本空間 Ω を設定してみる．いま，学生を無作為に選ぶという試行を行ったとき，例えばその学生の数学の成績が B，英語の成績が A であれば，そのことを記号 (B, A) で表し，どちらとも C ならば (C, C) と表すなどとする．そして，これをこの試行の「結果」と考えることにする．

a) このとき，「結果」全体の集合である標本空間 Ω をこの記号を用いて表せ．

$\Omega = \{\, (A, A), (A, B), (A, C), (B, A), (B, B), (B, C), (C, A), (C, B), (C, C) \,\}$

b) このように標本空間を設定した場合，事象 {(B,A)} の確率 $P(\{(\mathrm{B,A})\})$ は上の表からどのように読み取れるか．

数学の成績が B で，英語の成績が A である学生は，表によると 10% いるので，

$P(\{(\mathrm{B,A})\}) = 0.1$

c) 数学の成績が A であるという事象を M，英語の成績が A であるという事象を E とする．事象 M, E をそれぞれ上の記号を用い，外延的記法で表せ．そして，$P(M), P(E)$ を求めよ．

$M = \{\, (A, A), (A, B), (A, C) \,\}$，　$P(M) = 0.15 + 0.15 + 0.05 = 0.35$

$E = \{\, (A, A), (B, A), (C, A) \,\}$，　$P(E) = 0.15 + 0.10 + 0.05 = 0.30$

d) $M \cup E, M \cap E$ をそれぞれ外延的記法で表せ．また，$P(M \cup E), P(M \cap E)$ を求め，$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E)$ が成立していることを確かめよ．

$M \cup E = \{\, (A, A), (A, B), (A, C), (B, A), (C, A) \,\}$，　$M \cap E = \{\, (A, A) \,\}$

$P(M \cup E) = 0.15 + 0.15 + 0.05 + 0.1 + 0.05 = 0.50$，　$P(M \cap E) = 0.15$

$P(M) + P(E) - P(M \cap E) = 0.35 + 0.30 - 0.15 = 0.5$ だから，

$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E)$ が確かに成り立っている．

e) 数学と英語の成績のうち，少なくとも一方は A ではないという事象を N とする．N の余事象 $\overline{N}$ を外延的記法で表し，$P(N)$ を求めよ．

$\overline{N} = \{\, (A, A) \,\}$

$P(N) = 1 - P(\overline{N}) = 1 - P(\{(\mathrm{A,A})\}) = 1 - 0.15 = 0.85$

トランプとは，A（エース），2 から 10 までのカード，J（ジャック），Q（クイーン），K（キング）のカードが，スペード（♠）・ハート（♡）・ダイヤ（♢）・クラブ（♣）のそれぞれのスートに各 1 枚ずつ，全部で 52 枚のカードと、1〜2 枚のジョーカーから構成されている．J・Q・K の 3 つのランクには通常人物の画像が描かれており、まとめて「絵札」と呼ばれる．ふつう ♡ と ♢ は赤いカードで，♠ と ♣ は黒いカードである．ジョーカーは赤でも黒でもないとする．

一般に、カードの強さは、数字においては A > K > Q > J > 10 > 9 > ⋯ > 2 であり，スートについては ♠ > ♡ > ♢ > ♣ である．また、ジョーカーは、使わないゲームもあるが、使うゲームにおいては、どのカードよりも強い最強のカードとなったり、どのカードとしての代わりとしても使えるワイルドカードの役目を果たすことが多い．

3 ジョーカーを 1 枚含めた 53 枚のカードから 1 枚を取り出し，出たカードのスートを調べる．

a) このときの標本空間 Ω はどのように定めたらよいか．また，各根元事象（1 つの結果のみを要素とする事象）の確率はどのように定められるか．

$\Omega = \{ ♠, ♡, ♢, ♣, \text{Joker} \}$ などとすればよい．

このとき，$P(\{♠\}) = P(\{♡\}) = P(\{♢\}) = P(\{♣\}) = \dfrac{13}{53}$，　$P(\{\text{Joker}\}) = \dfrac{1}{53}$

b) 事象「赤いカードを取り出す」の余事象を外延的記法で表し，その確率を求めよ．

「赤いカードを取り出す」という事象を R とおくと，$\overline{R} = \{ ♠, ♣, \text{Joker} \}$．

$$P(\overline{R}) = \frac{13}{53} + \frac{13}{53} + \frac{1}{53} = \frac{27}{53}$$

c) ジョーカーはどのカードよりも強いカードであるとする．このとき，事象「クラブよりも強いカードを取り出す」を外延的記法で表し，その確率を求めよ．

「クラブよりも強いカードを取り出す」という事象を C とおくと，$C = \{ ♠, ♡, ♢, \text{Joker} \}$．

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\{♣\})\frac{13}{53} = 1 - \frac{13}{53} = \frac{40}{53}$$

4 今度は，ジョーカーを 2 枚含めた 54 枚のカードから 1 枚を取り出し，出たカードの数字（A，J，Q，K，ジョーカーを含む）を調べる．

a) このときの標本空間 Ω はどのように定めたらよいか．また，各根元事象の確率はどのように定められるか．

$\Omega = \{ \text{A}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \text{J}, \text{Q}, \text{K}, \text{Joker} \}$ などとすればよい．

このとき，$\omega \in \Omega$ かつ $\omega = \text{Joker}$ なら，$P(\{\omega\}) = \dfrac{4}{53}$．また，$P(\{\text{Joker}\}) = \dfrac{1}{53}$

b) 事象「取り出したカードが絵札である」を外延的記法で表し，その確率を求めよ．

「取り出したカードが絵札である」という事象を G とおくと，$G = \{ \text{J}, \text{Q}, \text{K} \}$．

$$P(G) = \frac{4}{53} + \frac{4}{53} + \frac{4}{53} = \frac{12}{53}$$

c) ジョーカーはどのカードよりも強いカードであるとする．このとき，事象「10 より弱いカードを取り出す」を外延的記法で表し，その確率を求めよ．

「10 より弱いカードを取り出す」という事象を T とおくと，$N = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

$$P(N) = \frac{4}{53} \times 8 = \frac{32}{53}$$

d) この設定で「黒いカードを取り出す」は事象であるか．

黒いカード全体の集合は，上で示した Ω の部分集合としては表せないので．この確率空間の事象ではない．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)