

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1] 次の二項分布の期待値, 分散と標準偏差を求めよ.

a) $B\left(12, \frac{1}{4}\right)$

$$\text{平均: } \mu = 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

$$\text{分散: } \sigma^2 = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{標準偏差: } \sigma = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

b) $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$

$$\text{平均: } \mu = 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{分散: } \sigma^2 = 9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\text{標準偏差: } \sigma = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

c) $B\left(8, \frac{2}{3}\right)$

$$\text{平均: } \mu = 8 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\text{分散: } \sigma^2 = 8 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{9}$$

$$\text{標準偏差: } \sigma = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

2] 次の確率変数 X は二項分布に従う. X を $B(n, p)$ の形に表し, X の期待値, 標準偏差を求めよ.

a) 1枚の硬貨を10回投げるとき, 表が出る回数 X .

$$p = \frac{1}{2}, n = 10 \text{ なので, } X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{平均: } \mu = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$\text{分散: } \sigma^2 = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{標準偏差: } \sigma = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

b) 不良率3%の製品の山から50個取り出したときの不良品の個数 X .

$$p = 0.03, n = 50 \text{ なので, } X \sim B(50, 0.03)$$

$$\text{平均: } \mu = 50 \times 0.03 = 1.5$$

$$\text{分散: } \sigma^2 = 50 \times 0.03 \times 0.97 = 1.455$$

$$\text{標準偏差: } \sigma = \sqrt{1.455} \approx 1.21$$

3] 確率変数 X が二項分布 $B(100, 0.2)$ に従うとき, 次の各場合に確率変数 Y の期待値と分散を求めよ.

a) $Y = 3X - 2$

$$\begin{cases} E(X) = 100 \times 0.2 = 20 \\ V(X) = 100 \times 0.2 \times 0.98 = 16 \end{cases}$$

より,

$$\begin{cases} E(Y) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \times 20 - 2 = 58 \\ V(Y) = V(3X - 2) = 3^2 \times 16 = 144 \end{cases}$$

b) $Y = -X$

$$\begin{cases} E(Y) = E(-X) = -E(X) = -20 \\ V(Y) = V(-X) = (-1)^2 \times 16 = 16 \end{cases}$$

c) $Y = \frac{X - 20}{4} \quad Y = 3X - 2$

$$\begin{cases} E(Y) = E\left(\frac{X - 20}{4}\right) = \frac{E(X) - 20}{4} = 0 \\ V(Y) = V\left(\frac{X - 20}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 V(X) = 1 \end{cases}$$

4] a, b は定数で, $a > 0$ とする. 確率変数 X の期待値が5, 分散が100であるとき, 1次式 $Y = aX + b$ で定められる確率変数 Y の期待値が0, 分散が1となるように, a, b の値を定めよ.

$$E(X) = 5, V(X) = 100 \text{ より,}$$

$$\begin{cases} E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = 5a + b = 0 \\ V(Y) = V(aX + b) = a^2 V(X) = 100a^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{が成り立てばよいから, } \begin{cases} 5a + b = 0 \\ 100a^2 = 1 \end{cases} \text{ を解いて, } a = \frac{1}{10}, b = -\frac{1}{2}.$$

5 数直線上に針を立て、硬貨を投げて、表が出たら針を正の方向に 1 だけ動かし、裏が出たら針を負の方向に 1 だけ動かす。最初に針を原点に立てておき、硬貨を 6 回投げた後の針の座標を X とする。また、第 k 回目に表が出ると 1、裏が出ると -1 となる確率変数を X_k とすると、 X_1, \dots, X_6 は互いに独立であって、 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_6$ と表せる。次の問に答えよ。

a) 第 k 回目に表が出ると 1、裏が出ると 0 となる確率変数を Y_k とする。 X_k を Y_k で表せ。

$y = 1$ のときに $x = 1$ 、 $y = 0$ のときに $x = -1$ となる 1 次関数 $x = my + b$ を求める。

そのために、
$$\begin{cases} 1 \cdot m + b = 1 \\ 0 \cdot m + b = -1 \end{cases}$$
 を解くと、 $m = 2$ 、 $b = -1$ を得る。

したがって、 $X_k = 2Y_k - 1$ が成り立つ。

b) $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_6$ は二項分布に従う。その分布を $B(n, p)$ の形で表せ。

$$Y \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$$

c) X を Y を用いて表せ。

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_6 = (2Y_1 - 1) + (2Y_2 - 1) + \dots + (2Y_6 - 1) \\ &= 2(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_6) - 6 \\ &= 2Y - 6 \end{aligned}$$

d) X の期待値、分散、標準偏差を求めよ。

$$Y \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right) \text{ より、} E(Y) = 6 \times \frac{1}{2} = 3, \quad V(Y) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

したがって、

$$E(X) = E(2Y - 6) = 2E(Y) - 6 = 2 \times 3 - 6 = 0$$

$$V(X) = E(2Y - 6) = 2^2 V(Y) = 6$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{6}$$

6 2 個のサイコロを同時に投げるとき、同じ目が出るならば 20 点を得、異なる目が出るならば 2 点を失うという。これを 15 回繰り返したとき、得点の合計の期待値と標準偏差を求めよ。

2 個のサイコロを同時に投げる思考を 15 回繰り返したときに同じ目が出る回数を X とする。

このとき、 X は二項分布 $B\left(15, \frac{1}{2}\right)$ にしたがう。

得点を Y とすると、 X と Y の間には

$$Y = 20 \times \underbrace{X}_{\text{同じ目}} + (-2) \times \underbrace{(15 - X)}_{\text{違う目}} = 22X - 30.$$

$$E(X) = 15 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}, \quad V(X) = 15 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4}.$$

したがって、

$$E(Y) = E(22X - 30) = 22E(X) - 30 = 22 \times \frac{15}{2} - 30 = 165 - 30 = 135$$

$$V(Y) = V(22X - 30) = 22^2 V(X) = 22^2 \times \frac{15}{4} = \frac{7260}{1} = 7260$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{7260} = 60\sqrt{11}$$