

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1) さいころを2回続けて投げるとき、最初に出た目の数を X_1 、2回目に出た目の数を X_2 とする。

a) 確率変数 X_1 の期待値 $E(X_1)$ と分散 $V(X_1)$ を求めよ。

$$E(X_1) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$V(X_1) = E(X_1)^2 - E(X_1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

b) 確率変数 Y を X_1 と X_2 の和とする。すなわち、 $Y = X_1 + X_2$ とする。 Y の確率分布を求めよ。

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

c) 確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求め、 $E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ であることを確かめよ

$$E(Y) = \frac{1}{36}(2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5 + 7 \times 6 + 8 \times 5 + 9 \times 4 + 10 \times 3 + 11 \times 2 + 12 \times 1)$$

$$= \frac{252}{36} = 7$$

一方、 $E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$ だから、 $E(X_1) + E(X_2) = 7$ 。

よって、 $E(Y) = E(X_1) + E(X_2)$ は確かに成り立つ。

d) 確率変数 Y の分散 $V(Y)$ を定義にしたがって求め、 $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ であることを確かめよ。

$$V(Y) = \frac{1}{36}((2-7)^2 \times 1 + (3-7)^2 \times 2 + (4-7)^2 \times 3 + (5-7)^2 \times 4 + (6-7)^2 \times 5 + (7-7)^2 \times 6 + (8-7)^2 \times 5 + (9-7)^2 \times 4 + (10-7)^2 \times 3 + (11-7)^2 \times 2 + (12-7)^2 \times 1)$$

$$= \frac{1}{36}(25 + 32 + 27 + 16 + 5 + 16 + 27 + 32 + 25) = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$$

一方、 $V(X_1) = V(X_2) = \frac{35}{12}$ だから、 $V(X_1) + V(X_2) = \frac{35}{6}$ 。

よって、 $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$ は確かに成り立つ。

e) 次に、確率変数 Z を X_1 と X_2 の積とする。すなわち、 $Z = X_1 X_2$ とする。 Z の確率分布を求めよ。

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

f) 確率変数 Z の期待値 $E(Z)$ を求め、 $E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ であることを確かめよ。

$$E(Z) = \frac{1}{36}(1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 4 + 8 \times 2 + 9 \times 1 + 10 \times 2 + 12 \times 1 + 15 \times 2 + 16 \times 1 + 18 \times 2 + 20 \times 2 + 24 \times 2 + 25 \times 1 + 30 \times 2 + 36 \times 1)$$

$$= \frac{441}{36} = \frac{49}{4}$$

一方、 $E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$ だから、 $E(X_1)E(X_2) = \frac{49}{4}$ 。

よって、 $E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ は確かに成り立つ。

2] 独立な確率変数 X と Y について、 $E(XY) = E(X)E(Y)$ が成り立つ。この性質を既知として、独立な確率変数 X と Y について、 $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ が成り立つことを証明せよ。

[分散と期待値の関係式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いるとよい。]

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2) \\ &= \underbrace{E(X^2) - E(X)^2}_{=V(X)} + 2\underbrace{(E(XY) - E(X)E(Y))}_{=0 (X, Y \text{ 独立より})} + \underbrace{E(Y^2) - E(Y)^2}_{=V(Y)} \\ &= V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

3] 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 5 、確率変数 Y の期待値が 2 で分散が 4 であり、 X と Y が互いに独立であるとする。このとき、確率変数 $Z = X + Y$ の期待値、分散と標準偏差を求めよ。

$$\begin{aligned} E(X) &= -3, \quad V(X) = 5, \\ E(Y) &= 2, \quad V(Y) = 4. \end{aligned}$$

X と Y は独立だから、

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = -3 + 2 = -1$$

$$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 5 + 4 = 9$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{9} = 3$$

4] a) さいころを 1 回投げるとき、1 の目が出ると $X = 1$ 、それ以外の目が出ると $X = 0$ とする。確率変数 X の期待値と分散を求めよ。

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times 0 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \left(\frac{1}{6} \times 1^2 + \frac{5}{6} \times 0^2\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

X	1	0	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

b) 1 個のサイコロを続けて 5 回投げるとき、1 の目が出る回数を Y とする。このとき、第 k 回目に 1 の目が出ると 1、それ以外の目が出ると 0 となる確率変数を X_k とすると、各 X_k は a) と同じ分布にしたがい、 X_1, \dots, X_5 は互いに独立であって、 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ と表せる。これを用いて、確率変数 Y の期待値、分散と標準偏差を求めよ。

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_5) = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$$

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_5) = \frac{5}{36} \times 5 = \frac{25}{36}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{5}{6}$$