

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1				氏名	

以下の問題の目的は、公式  $(x^a)' = ax^{a-1}$  が任意の有理数  $a$  について成り立つことを系統的に証明することである。したがって、すでに証明された場合以外、この公式を用いて答えてはならない。

① 【 $a$  が自然数の場合】 任意の正の整数  $n$  について関数  $f_n(x)$  を  $f_n(x) = x^n$  と定義する。すなわち、 $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, \dots$  となる関数の列  $f_n(x)$  を考える。このとき、

$$f_n'(x) = nx^{n-1} \quad \dots\dots (*)$$

が成り立つこと、すなわち  $(x^n)' = nx^{n-1}$  であることを数学的帰納法で証明したい。

(I)  $n = 1$  のとき、 $f_1(x)$  を定義に従って計算すると

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

よって、(\*) は  $n = 1$  のとき確かに成り立つ。

(II)  $n = k$  のとき (\*) が成り立つと仮定する。すなわち  $f_k'(x) = kx^{k-1}$  が成り立つとする。すると、 $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$  だから、積の微分公式を用いて、

$$\begin{aligned} f_{k+1}'(x) &= (f_1(x)f_k(x))' = f_1'(x)f_k(x) + f_1(x)f_k'(x) \\ &= 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

したがって、 $f_n'(x) = nx^{n-1}$  は  $n = k+1$  のときも成立。

(I), (II) より、 $f_n'(x) = nx^{n-1}$  はすべての自然数で成り立つ。

[結論まできちんと述べよ。]

② 【 $a$  が負の整数の場合】  $n$  を自然数として、 $(x^{-n})'$  を求めたい。 $(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)'$  と書き直し、商の微分公式を用いて計算し、さらにそれを  $Ax^B$  の形に表すことにより、 $(x^{-n})'$  を求めよ。

$g'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$  だから、

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

上の式を指数を用いて表すと、

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

③ 【 $a = 1/n$  の場合】  $n$  を自然数として、 $(x^{\frac{1}{n}})'$  を求めたい。関数  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  は、関数  $f(x) = x^n$  の逆関数である。すなわち  $\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$  である。

a) 逆関数の微分公式を用いて  $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$  であることを示せ。

$f(x) = x^n$  とすると、 $f'(x) = nx^{n-1}$ 、 $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  だから、逆関数の微分公式により、

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

b) 上の結果を分数指数を用いて  $Ax^B$  の形に表すことにより、公式  $(x^a)' = ax^{a-1}$  が  $a = \frac{1}{n}$  のときにも成り立つことを証明せよ。

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

④ 【 $a$  が有理数の場合】  $m, n$  を自然数として、 $(x^{\frac{m}{n}})'$  を求めたい。 $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$  であることを用い、合成関数の微分公式を用いて  $(x^{\frac{m}{n}})'$  を計算し、公式  $(x^a)' = ax^{a-1}$  が  $a = \frac{m}{n}$  のときにも成り立つことを証明せよ。[ヒント:  $f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$  とし、 $x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$  とみなすとよい。]

$f(x) = x^m, g(x) = x^{\frac{1}{n}}$  とすると、 $x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$  であり、 $f'(x) = mx^{m-1}$ 、 $g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$  だから、合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' &= (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) = m(g(x))^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

5]  $x \neq 1$  で,  $n$  が自然数のとき,  $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$  が成り立つ. この両辺を  $x$  について微分することにより,  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$  を求めよ.

$$(\text{左辺})' = 0 + 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺})' &= \frac{(1 - x^{n+1})'(1 - x) - (1 - x^{n+1})(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1 - x) - (1 - x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n + 1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$

6] 関数  $f(x)$  が微分可能であるとき, 次の導関数を  $f(x), f'(x)$  を用いて表せ.

$$\text{a) } ((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

$$\text{b) } (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

7] 次の関数を変数  $x$  で微分せよ.

$$\text{a) } f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3 \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)' \\ &= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3 (x^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}})' \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 - 2x)' \\ &= -(x^2 - 2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x - 1) \\ &= \frac{1 - x}{(\sqrt{x^2 - 2x})^3} \end{aligned}$$

8] 微分可能な関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  がまた微分可能であれば, その導関数  $(f'(x))'$  を  $f''(x)$  で表し, もとの関数  $f(x)$  の第二次導関数と呼ぶ. 関数  $f(x), g(x)$  がともに微分可能であるとき, 次の等式を証明せよ.

$$(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))'' &= (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))' \\ &= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \end{aligned}$$