6 合成関数の微分公式

２０２４年度後期　基礎数学 A2（金曜２限）

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

● **合成関数の微分公式（連鎖律）**

2 つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f\big(g(x)\big)$ の導関数を $y = f(u)$, $u = g(x)$ の導関数で表したい．いま，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu,

u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とする．すなわち，

$$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x),$$
$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$$

と定義する．ここで，求めたいのは $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x \to 0$ としたときの極限である．Δx を変化させたとき，Δu，Δy は段階的に変化するので，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ に Δu を挟み，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (*)$$

と書く．この両辺の $\Delta x \to 0$ とした極限を考える．ここで $u = g(x)$ が微分可能な関数であることから，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるので，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\boxed{\Delta u\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

が成り立つ．これより，合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる．

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dy}{du}}\cdot\boxed{\frac{du}{dx}}$$

合成関数の微分公式を，$'$ を用いた記法で表すことを考えよう．合成関数 $f\big(g(x)\big)$ の導関数 $\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'$ は

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x}$$

で定義される．ここで，$u = g(x)$ としたとき，$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$ であったから，

$$g(x+\Delta x) = u + \Delta u$$

と書ける．したがって，$g(x+\Delta x)$，$g(x)$ をそれぞれ，$u+\Delta u$，u で置き換えて

$$f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big) = \boxed{f(u+\Delta u) - f(u)}$$

と書くことができる．そして，$(*)$ と同様に Δu を間に挟むことにより

$$\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\boxed{g(x+\Delta x) - g(x)}}{\Delta x}$$

となる．この両辺において $\Delta x \to 0$ とすると，$\Delta u \to 0$ だから，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(g(x+\Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

ここで，

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \boxed{f'(u)}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \boxed{g'(x)}$$

だから，

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \boxed{f'(u)}\cdot\boxed{g'(x)}$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u)= f'(g(x))$ と書き直せるので，次の合成関数の微分公式が得られる．

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = \boxed{f'\big(g(x)\big)g'(x)}$$

● **逆関数の微分公式**

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい．関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ とは，$g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない．そこで，

$$f(g(x)) = x$$

の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると，

$$\text{左辺} = \boxed{f'\big(g(x)\big)g'(x)}, \qquad \text{右辺} = (x)' = 1$$

となるから，

$$\boxed{f'\big(g(x)\big)g'(x)} = 1$$

これを $g'(x)$ について解くと，

$$g'(x) = \frac{1}{\boxed{f'\big(g(x)\big)}}$$

ここで，$g(x) = f^{-1}(x)$，$g'(x) = \big(f^{-1}(x)\big)'$ として，逆関数の導関数の公式が得られる．

$$\big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{\boxed{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$$

$\boxed{1}$ $\Big(f\big(g(h(x))\big)\Big)'$ を求めよ．

$g(h(x)) = G(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\Big(f\big(g(h(x))\big)\Big)' &= \big(f(G(x))\big)' = f'(G(x))G'(x)\\ &= f'\big(g(h(x))\big)\big(g(h(x))\big)'\\ &= f'\big(g(h(x))\big)g'(h(x))h'(x)\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\big(g(x)^2\big)'$ を求めよ．

$f(x)=x^2$ とおくと，$f'(x)=2x$ だから，$\big(g(x)^2\big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x) = 2g'(x)g(x)$.

$\boxed{3}$ $f(x)=x^2$ としたとき，$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ である．逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt{x})'$ を求めよ．

$f'(x)=2x$ だから，$(\sqrt{x})' = (f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \dfrac{1}{2f^{-1}(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{4}$ 前問と同様にして $(\sqrt[3]{x})'$ を求めよ．

$f(x)=x^3$ とおくと，$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$，$f'(x)=3x^2$ だから，

$$(\sqrt[3]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{3f^{-1}(x)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$\boxed{5}$ 次の関数を変数 x で微分せよ．

a）$f(x) = (1-2x^2)^3$

$f'(x) = -12x(1-2x^2)^2$

b）$f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-8}{(4x+3)^3}$

c）$f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

$f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^4}$

d）$f(x) = \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^3$

$f'(x) = 3\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^2\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

e）$f(x) = x\sqrt{x+1}$

$f'(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}} \left(= \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\right)$

f）$f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

g）$f(x) = \sqrt[3]{x^2-x+1}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$

h）$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)