基礎数学 A2	入学年度		学部	学 科		組		番 号		検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人												

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

1 $f(x)=\dfrac{4x+5}{2x+3}$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

分母 $\neq 0$ より，$x\neq -\frac{3}{2}$　　（正確には $\{x \mid x\neq -\frac{3}{2}\}$）

b) $f(x)$ を $a+\dfrac{b}{2x+3}$ の形に表せ．

$4x+5$ を $2x+3$ で割り算すると，商は 2，余りは -1 なので，

$$f(x)=\frac{4x+5}{2x+3}=2+\frac{-1}{2x+3}$$

c) x が -1 から $-1+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．［ヒント：前問の形に直してから計算するとよい．］

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{\left(2+\frac{-1}{2(-1+h)+3}\right)-\left(2+\frac{-1}{2\times(-1)+3}\right)}{h}$$

$$=\frac{\frac{-1}{1+2h}-(-1)}{h}=\frac{-1+(1+2h)}{h(1+2h)}=\frac{2h}{h(1+2h)}=\frac{2}{1+2h}$$

d) $f(x)$ の $x=-1$ における微分係数を極限による定義を用いて計算せよ．

c) の結果を用いて，

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{1+2h}=2$$

e) $y=f(x)$ のグラフの $(-1, f(-1))$ における接線の方程式を求めよ．

接線の方程式は $y-f(-1)=f'(1)(x-(-1))$ で与えられる．

$f(-1)=1,\ f'(1)=2$ より，$y-1=2(x+1)$

$\therefore\ y=2x+3$

f) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$ の交点を求めよ．

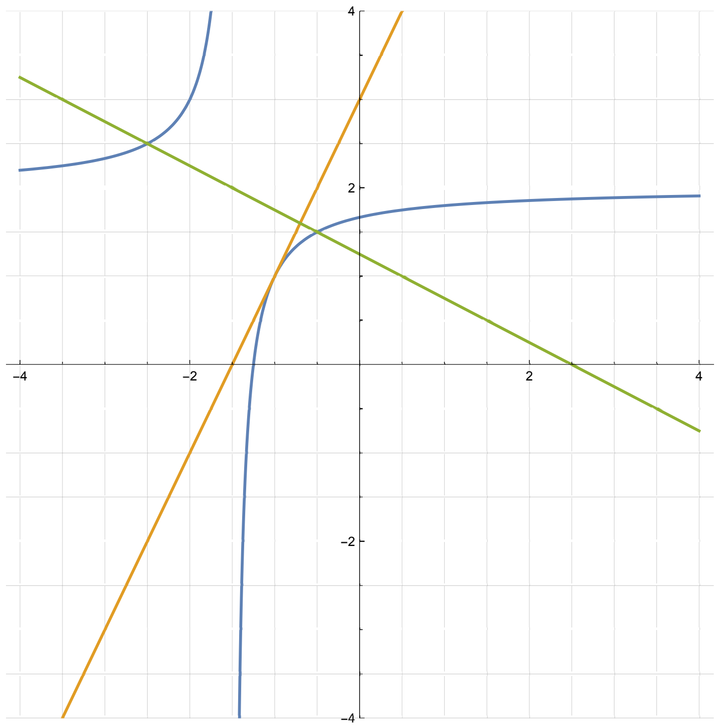
$\dfrac{4x+5}{2x+3}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$ を解く．$4x+5=(2x+3)(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4})$ を整理して，

$4x^2+12x+5=0 \Leftrightarrow (2x+1)(2x+5)=0$．したがって，

$x=-\frac{1}{2}$ または $-\frac{5}{2}$．それぞれについて y 座標を求めると，

交点は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ と $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ の 2 つであることがわかる．

g) $y=f(x)$ のグラフ，e) で求めた接線，および直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$ を下の座標平面内に描け．



h) グラフを利用して不等式 $\dfrac{4x+5}{2x+3}\leqq -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$ を解け．

$y=\dfrac{4x+5}{2x+3}$ のグラフが直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ より下にある x の範囲を求めればよい．グラフを参照して，$x\leqq -\frac{5}{2}$ または $-\frac{3}{2}<x\leqq -\frac{1}{2}$．

i) $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求め，その定義域を示せ．

$y=\dfrac{4x+5}{2x+3}$ を x について解けばよい．まず分母を払って，$(2x+3)y=4x+5$．これを x について整理すると，$(2y-4)x=5-3y$．この x についての方程式は $y\neq 2$ のとき解を持ち，$x=\dfrac{5-3y}{2(y-2)}$．ここで，y と x を入れ替えて $y=\dfrac{5-3x}{2(x-2)}$．$\therefore\ f^{-1}(x)=\dfrac{5-3x}{2(x-2)}$．定義域は $x\neq 2$．

j) $y=f(x)$ および，$y=f^{-1}(x)$ の値域を示せ．

$y=f(x)$ の値域：$y\neq 2$

$y=f^{-1}(x)$ の値域：$y\neq -\dfrac{3}{2}$

k) $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ が成り立つことを確かめよ．

$$(f^{-1}\circ f)(x)=\frac{5-3\frac{4x+5}{2x+3}}{2\left(\frac{4x+5}{2x+3}-2\right)}=\frac{5(2x+3)-3(4x+5)}{2\big((4x+5)-2(2x+3)\big)}$$

$$=\frac{2x}{-2\times(-1)}=x$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \sqrt{2x+5}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

定義域：$x \geqq -\frac{5}{2}$（根号内 $\geqq 0$ より）

値域：$y \geqq 0$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y = \sqrt{2x+5}$ の両辺を 2 乗して，$y^2 = 2x+5$．これを x について解くと，$x = \frac{1}{2}(y^2-5)$．ここで，x と y を入れ替えて，$y = \frac{1}{2}(x^2-5)$．すなわち，$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2-5)$.

$f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域に一致するから，$x \geqq 0$.

また，$f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域に一致するので，$y \geqq -\frac{5}{2}$.

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x+5}\right)' = \left((2x+5)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}}(2x+5)'$$
$$= \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

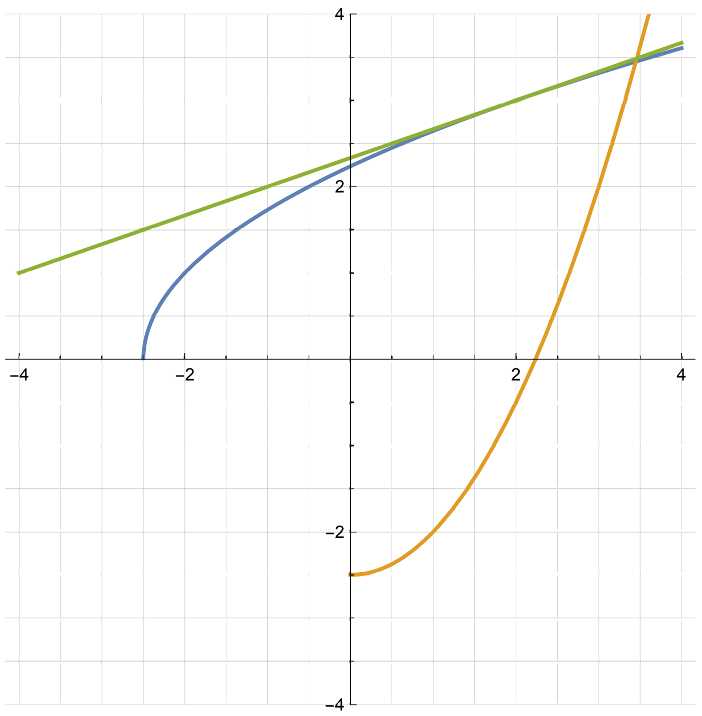
d) $y = f(x)$ のグラフの $(2, f(2))$ における接線の方程式を求めよ．

接線の方程式は $y - f(2) = f'(2)(x-2)$ で与えられる．

$f(2) = 3, f'(2) = \frac{1}{3}$ より，$y - 3 = \frac{1}{3}(x-2)$

$\therefore\ y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$(2, f(2))$ における接線，および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



$\boxed{3}$ $f(x) = (x^2+2x)e^{-x}$ とする．

a) $e \fallingdotseq 2.72, e^{-1} \fallingdotseq 0.368$ として $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ をそれぞれ求めよ．

$f(-2) = 0$　　$f(-1) = -2.72$　　$f(0) = 0$

$f(1) = 1.10$　　$f(2) = 1.08$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = (x^2+2x)'e^{-x} + (x^2+2x)\left(e^{-x}\right)'$$
$$= (2x+2)e^{-x} + (x^2+2x)e^{-x} \times (-1)$$
$$= (2-x^2)e^{-x}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x^2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x^2)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 2-x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

d) $f(x)$ の 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f''(x) = (2-x^2)'e^{-x} + (2-x^2)\left(e^{-x}\right)'$$
$$= (-2x)e^{-x} + (2-x^2)e^{-x} \times (-1)$$
$$= (x^2-2x-2)e^{-x}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-2x-2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2-2x-2)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x^2-2x-2 > 0$

$\Leftrightarrow x < 1-\sqrt{3}$ または $x > 1+\sqrt{3}$

f) 関数 $f(x)$ の増減表を書き，グラフ $y = f(x)$ の凹凸を調べよ．(凹凸は曲がった矢印 ⤴ ↗ ↘ ⤵ で表すこと．）

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	⤴	変曲点	↗	極大	⤵	変曲点	↘

g) $f(x)$ の極大値・極小値と，それをとるときの x の値を求めよ．

極小値：$(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$　$(x = -\sqrt{2})$

極大値：$(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$　$(x = \sqrt{2})$

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

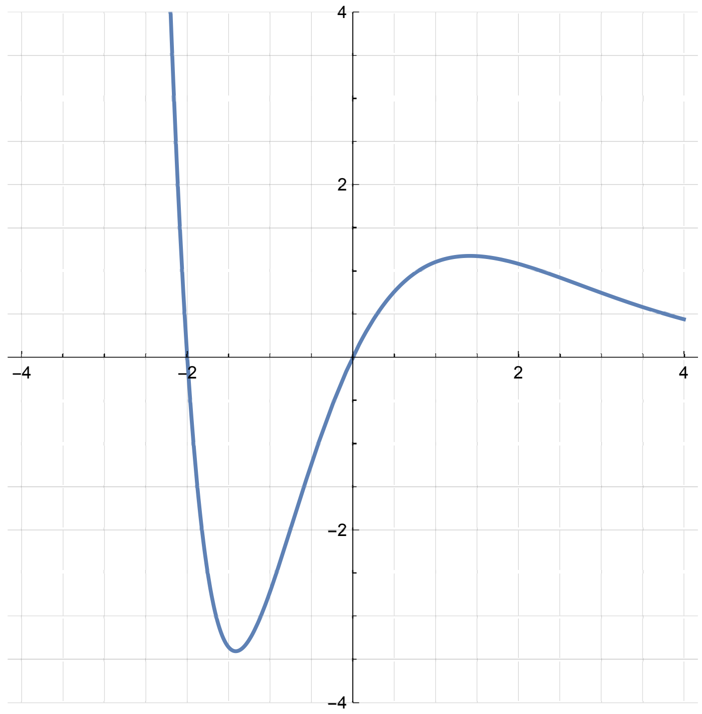
変曲点の x 座標は：$1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$

【2 枚目につづく】

2024 年 1 月 5 日

基礎数学 A2	入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人													

i) ここまでの結果を反映させ，$y = f(x)$ のグラフを丁寧に描け．必要とあらば，$f(-\sqrt{2}) \fallingdotseq -3.408$，$f(\sqrt{2}) \fallingdotseq 1.174$，$f(1-\sqrt{3}) \fallingdotseq -1.930$，$f(1+\sqrt{3}) \fallingdotseq 0.842$ であることを用いてもよい．



$\boxed{4}$ 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+2)'(x^2-x+1)-(x+2)(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{(x^2-x+1)-(x+2)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2-4x+3}{(x^2-x+1)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{1+x^2}-x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$
$$= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

c) $f(x) = \log\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

$f(x) = \log|x+1| - \log|x-1|$ だから，

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}$$

$\boxed{5}$ 微分の公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ について，$a = n$（n は整数）の場合と，$a = \dfrac{1}{n}$（n は整数）の場合はすでに証明されていると仮定して，$a = \dfrac{m}{n}$（m，n は整数）の場合を合成関数の微分公式を用いて証明せよ．

$u = x^m$, $y = u^{\frac{1}{n}}$ とおくと，$y = x^{\frac{m}{n}}$．

すでに証明されているとしていることから，$\dfrac{du}{dx} = mx^{m-1}$, $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}$．

したがって，

$$\left(x^{\frac{n}{m}}\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$= mx^{m-1}\cdot\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}$$
$$= \frac{m}{n}x^{m-1}\cdot(x^m)^{\frac{1}{n}-1}$$
$$= \frac{m}{n}x^{m-1+\frac{m}{n}-m}$$
$$= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$$

これより，$a = \dfrac{m}{n}$ の場合も $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が成り立つ．

$\boxed{6}$ a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ であることを用いて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ を求めよ．ただし，r は定数である．

$h = \dfrac{r}{n}$ とおくと，$h \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ だから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{r}{h}} = \lim_{h\to 0}\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^r = \left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^r$$
$$= e^r$$

b) 元本 A を年利 r の連続複利で運用すると，1 年後の元利合計は Ae^r となる．年利 4% ($r = 0.04$) の連続複利で運用した場合，元本がもとの 2 倍になるのはおよそ何年後か．$\log 2 = 0.693$ として計算せよ．

年利 4% ($r = 0.04$) の連続複利で m 年間運用すると，元利合計は $A(e^{0.04})^m = Ae^{0.04m}$ になる．これが $2A$ になるの m を求めればよい．

$$Ae^{0.04m} = 2A$$
$$\Leftrightarrow e^{0.04m} = 2$$
$$\Leftrightarrow 0.04m = \log 2$$
$$m = \frac{\log 2}{0.04} = \frac{0.693}{0.04} = 17.33$$

したがって，元本が 2 倍になるのは約 $17\frac{1}{3}$ 年，すなわち約 17 年 4 ヶ月後．