

復習問題の略解

① $x^3 + 2x^2 - x$

② a) $-108a^8b^9$ b) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

③ a) $3(x+3)^2$ b) $(x+2)(x^2-2x+4)$ c) $(a+b)(x-y)$

④ 筆算による割り算を実行すると、商は $x-2a$ 、余りは $-2a^3$ となる。

⑤ a) $P(2) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 24 = 0$ 。これより、 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 0 であること、すなわち $P(x)$ は $x-2$ で割り切れることがわかる。

b) $P(x)$ を $x-2$ で割ると、 $P(x) = (x-2)(x^2+7x+12)$ 。 $(x^2+7x+12)$ をさらに因数分解して $P(x) = (x-2)(x+3)(x+4)$ 。

c) $x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3)$ と因数分解されるので、最大公約数は $(x-2)(x+3)$ 、最小公倍数は $x(x-2)(x+3)(x+4)$ 。

⑥ 筆算による割り算を実行すると、商は 5、余りは 7 となるので、 $5 + \frac{7}{x-2}$

⑦ $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ 、 $x^3+x^2-x-1 = (x+1)^2(x-1)$ 、 $x^3-x^2-x+1 = (x-1)^2(x+1)$ 。最大公約数： $(x-1)(x+1)$ 、最小公倍数： $(x-1)^2(x+1)^2$

⑧ a) $\frac{ay^2}{cx^3}$ b) $\frac{2}{6x-1}$ c) $\frac{3x-1}{x^2-x}$ d) $\frac{c}{bd}$ e) $\frac{1}{x+y+z}$ f) $\frac{-1}{a(a+h)}$

⑨ a) $x > 1$ b) $2 < x < 6$

⑩ もとの立方体の 1 辺の長さを x とする。縦横を変えて作った立方体の体積は $(x-2)(x+5)x$ 。これがもとの立方体の体積 x^3 より 48cm^3 したのだから、 $(x-2)(x+5)x = x^3 + 48$ 。これを整理し、因数分解すると $(3x+8)(x-6) = 0$ 。ここで、 $x > 0$ だから、 $x = 6$ が唯一の解となる。

⑪ x 軸方向に -1 、 y 軸方向に $+\frac{1}{2}$ 。

⑫ a) $x = 1 \pm 2i$ b) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{4}$

⑬ a) $3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}$ b) $x \neq 10$ c) $x = 3$

⑭ $y = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$ とし、 $-1 \leq x \leq 5$ においてグラフまたは増減表をかく。 $x = 5$ のとき最大で、最大値 13。 $x = 1$ のとき最小で、最小値 -3 。

⑮ a) 1 円値上げすると $\frac{1}{2}$ 個売り上げが減るということだから、 x 円値上げすると $\frac{x}{2}$ 個売り上げが減る。したがって、売価が $(80+x)$ 円するとき何個の売り上げは $(100 - \frac{x}{2})$ となり、売上金額は (売価) \times (売り上げ個数) $= (80+x)(100 - \frac{x}{2}) = -\frac{1}{2}(x-60)^2 + 9800$ 。これより、最の売り上げ金額を得るための売価は $80 + 60 = 140$ 円。

b) a) より、最の売り上げ金額を得るの $x = 60$ のとき、このとき、売価は $80 + 60 = 140$ 円。

⑯ 短い辺の長さを x とすると、長い辺の長さは $10-x$ となる。「短い辺」が「長い辺」より本当に短いための条件は $x < 10-x$ 。すなわち $x < 5$ である。一方、長方形の面積は $x(10-x)$ なので、

$$x(10-x) \geq 21 \iff -x^2 + 10x - 21 \geq 0 \iff (x-3)(x-7) \leq 0 \iff 3 \leq x \leq 7$$

これと先ほどの条件を合わせて $3 \leq x < 5$ 。

⑰ a) -3 b) 10 c) $\frac{1}{10}$ d) $a^{\frac{1}{6}}$ e) ab

18 $\sqrt[10]{a^7}$

19 a) $\frac{1}{4}$

b) $1 + \log_2 3$

c) 1

20 $x = \frac{1}{2}$

21 光が1回反射するごとに光度は $\frac{9}{10}$ になるので、反射を n 回繰り返したとき、光度はもとの $(\frac{9}{10})^n$ になる。これが $\frac{1}{9}$ 以下になるようにしたい。すなわち、 $(\frac{9}{10})^n < \frac{1}{9}$ となる n を求めればよい。両辺の \log_{10} をとり、対数の基本性質を用いて変形すると、 $n(\log_{10} 9 - \log_{10} 10) < \log_{10} 1 - \log_{10} 9$ 。さらに変形して $n(2\log_{10} 3 - 1) < -2\log_{10} 3$ 。ここで、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて数値計算すると (n の係数が負なので不等号の向きが変わることに注意して)、 $n > \frac{2\log_{10} 3}{1 - 2\log_{10} 3} = 20.834\dots$ すなわち、21回反射させればよいことがわかる。

22 a) 3

b) 4

c) $\frac{-1}{a(a+h)}$

23 a) $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(1+h)-1)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4h + 4) = 4$

b) $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(a+h)-1)^2 - (2a-1)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 8ah - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4h + 8a - 4) = 4(2a - 1)$

24 a) $f'(x) = (2(x^2 + 3x^3))' = 2x(2 + 9x)$

b) $f'(x) = (6x^2 - x - 15)' = 12x - 1$

c) $f'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2$

25 a) 16

b) 8

c) $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - (2+h)^2 - (2+h) + 1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 5h^2 + 7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 5h + 7) = 7$

d) $y = 7x - 11$

e) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

f) $x = 1, -\frac{1}{3}$

g) $f'(x) = -1$ となる x は 0 と $\frac{2}{3}$ 。 $x = 0$ での接線 $y = -x + 1$ 、 $x = \frac{2}{3}$ での接線 $y = -x + \frac{23}{27}$

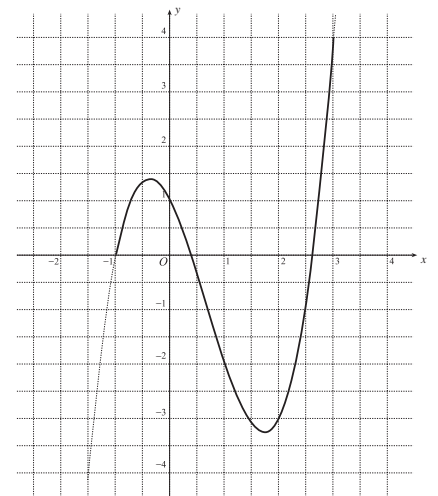
h) 増減表を書くと $x = -\frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{32}{27}$ 、 $x = 1$ で極小値 0 。

26 $f'(x) = 3x^2 - 4x - 2$ で、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ のとき。

$-1 < \frac{2 - \sqrt{10}}{3} < \frac{2 + \sqrt{10}}{3} < 3$ となるので、この範囲で増減表を書くと

x	-1		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	4

したがって、 $f(x)$ は $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$ のとき最小で、最小値 $-\frac{25 - 20\sqrt{10}}{27} \approx -3.27$ 、 $x = 3$ のとき最大で、最大値 4 となる。グラフは右の図のようになる。



27 a) 各辺が正でなければいけないので $x > 0$ かつ $10 - 2x > 0$ かつ $16 - 2x > 0$ 。ゆえに $0 < x < 5$ 。

b) 体積 $V = x(10 - 2x)(16 - 2x) = 4x(5 - x)(8 - x)$ 。

c) $V' = (4(x^3 - 13x^2 + 40x))' = 4(3x^2 - 26x + 40) = 4(x - 2)(3x - 20)$ 。
 $0 < x < 5$ の範囲で $V' = 0$ となるのは $x = 2$ のみ。 $0 < x < 5$ の範囲で増減表を書くと下のようになる。

x	0		2		5
V'		+	0	-	
V	0	↗	144	↘	0

したがって、 $x = 2$ のとき、体積 V は最大となる。