

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

1 次関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め、 $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ。さらにそれをもとに増減表を書け。

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ または } 2 < x$$

x					
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x - 1)(x + 3)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -3 \text{ または } 1 < x$$

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	32	↘	0	↗

2 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ の導関数 $f'(x)$ を求め、 $f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ。さらにそれをもとに増減表を書き、 $-2 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ。また、それらを与える x の値を求めよ。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ または } 2 < x$$

右の増減表より、

$$\begin{cases} \text{最大値} & 4 & (x = 0, 3) \\ \text{最小値} & -16 & (x = -2) \end{cases}$$

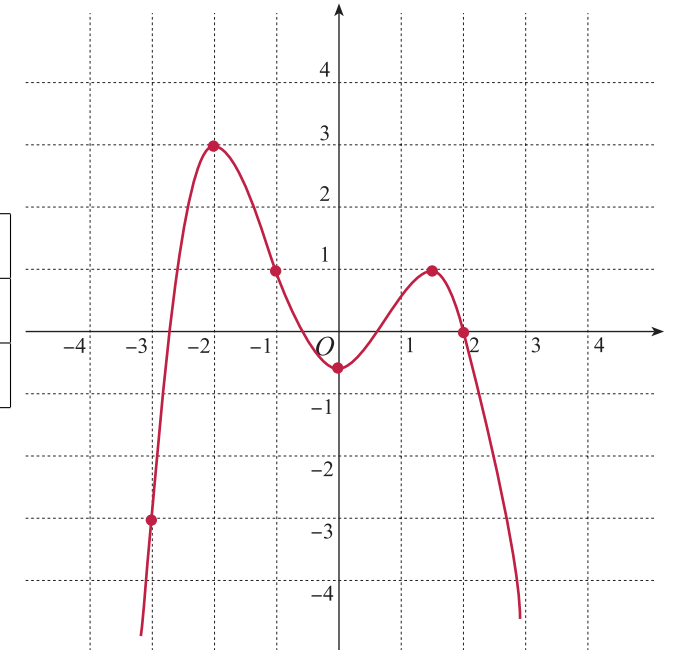
x	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	-16	↗	4	↘	0	↗	4

3 下の表は、関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について、わかっていることをまとめてある。このとき、 $y = f(x)$ のグラフを可能な限りなるべく忠実に描け。

a)

x	-3	-2	-1	0	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-3	3	1	$-\frac{1}{2}$	1	0

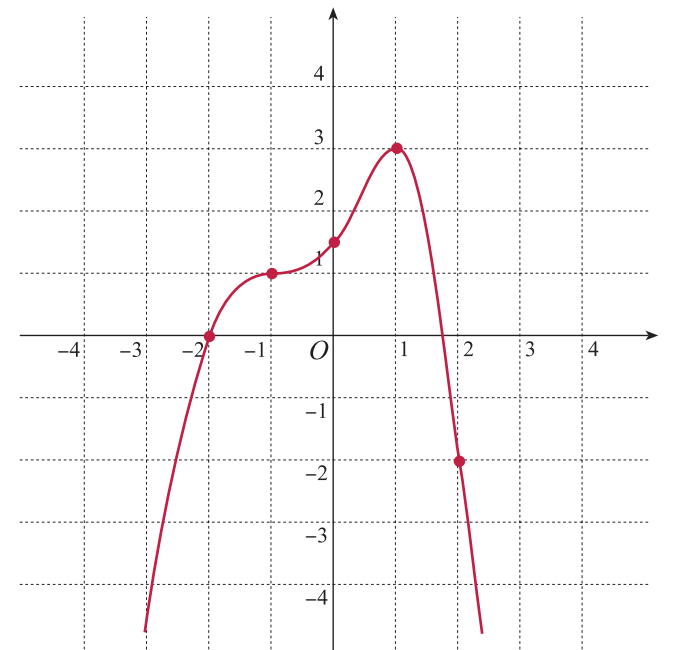
x	...	-2	...	0	...	$\frac{3}{2}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	3	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	1	↘



b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	$\frac{3}{2}$	3	-2

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	1	↗	3	↘



4 次の関数 $f(x)$ の増減表を書き、グラフを描け.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 2x - \frac{5}{2}$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$$

$$= -\frac{1}{2}(3x^2 - 4x - 4)$$

$$= -\frac{1}{2}(3x + 2)(x - 2)$$

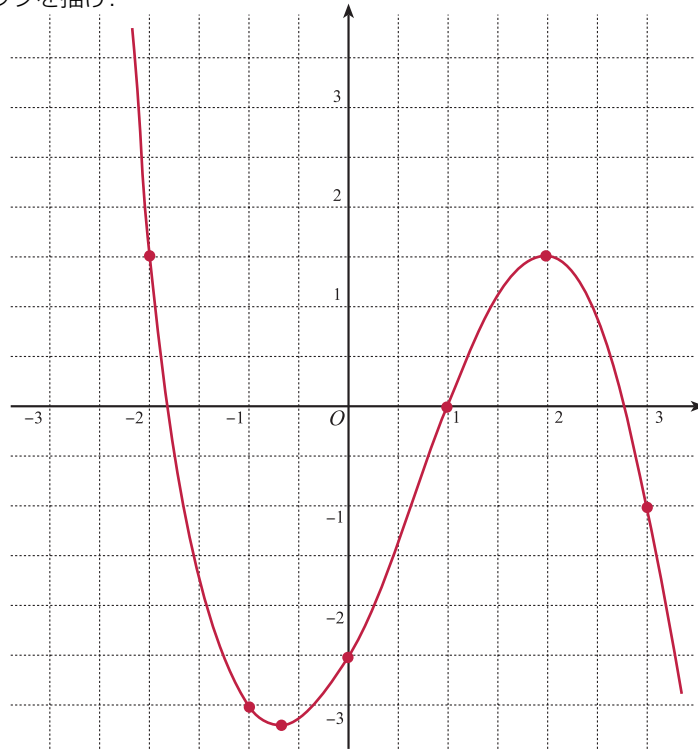
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$$

x	...	$-\frac{2}{3}$...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	$-\frac{175}{54}$	\nearrow	$\frac{3}{2}$	\searrow

$$\left(f(-2) = \frac{3}{2}, f(-1) = -3, f(0) = -\frac{5}{2} \right)$$

$$\left(f(1) = 0, f(2) = \frac{3}{2}, f(3) = -1 \right)$$



b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 1$$

$$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{6}$$

したがって、すべての実数について

$$f'(x) > 0$$

増減表は

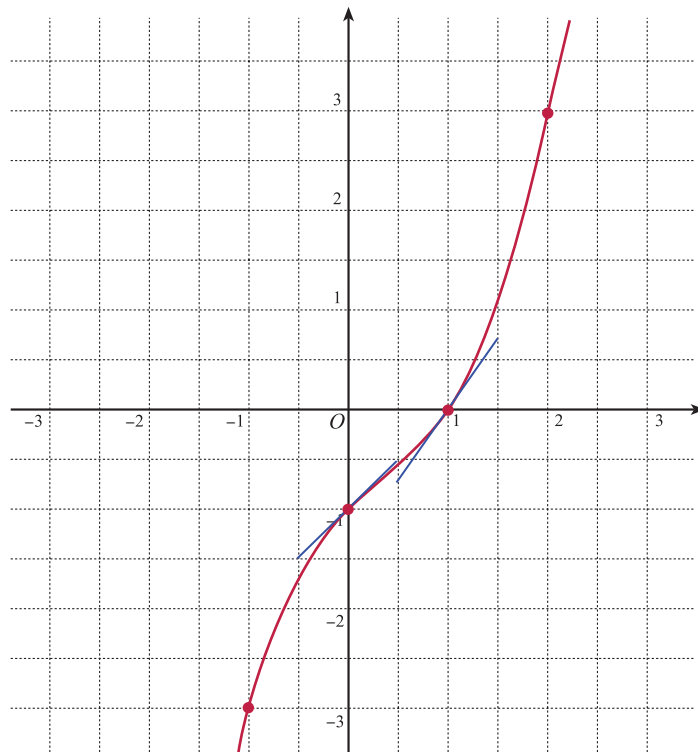
x	...
$f'(x)$	+
$f(x)$	\nearrow

$$\left(f(-1) = -3, \right.$$

$$\left. f(0) = -1, f'(0) = 1 \right)$$

$$\left(f(1) = 0, f'(1) = \frac{3}{2}, \right.$$

$$\left. f(2) = 3 \right)$$



5 底面の半径が a 、高さが h の直円柱がある.

a) この直円柱の表面積を求めよ.

$$\text{表面積 } S = 2 \times (\text{底面積}) + (\text{側面積}) = 2\pi a^2 + 2\pi ah = 2\pi(a^2 + ah)$$

b) この直円柱の表面積が 8π であるとき、この直円柱の体積を a を用いて表せ.

$$S = 8\pi \Leftrightarrow 2\pi(a^2 + ah) = 8\pi \Leftrightarrow a^2 + ah = 4 \Leftrightarrow h = \frac{4 - a^2}{a}$$

$$V = \pi a^2 h = \pi a^2 \frac{4 - a^2}{a} = \pi a(4 - a^2)$$

c) 表面積が 8π である直円柱のうちで、体積が最大となるものの底面の半径と高さを求めよ.

a, h は長さなので、正の値をとるから、 $a > 0$ かつ $\frac{4 - a^2}{a} > 0$. よって a の取り得る範囲は $0 < a < 2$.

$$V = \pi(4a - a^3) \text{ より } V' = \pi(4 - 3a^2)$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow 4 - 3a^2 = 0 \text{ かつ } a > 0 \text{ より, } a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$V' > 0 \Leftrightarrow 4 - 3a^2 > 0 \text{ かつ } 0 < a < 2 \text{ より, } 0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

右の増減表より、 V は $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき最大で、

$$\text{そのとき, } h = \frac{4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(答) 底面の半径 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 、高さ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ のとき体積は最大になる。(最大値 $V = \frac{16\sqrt{3}}{9}\pi$)

a	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$...	2
V'	+	+	0	-	-
V	0	\nearrow	最大	\searrow	0

6 右図のように関数

$$y = -x^2 + 6x \quad (0 \leq x \leq 6)$$

のグラフ上の点 $P(x, y)$ から x 軸に垂線 PH を下ろす.
このとき、 $\triangle POH$ の面積を最大にする x の値と面積の最大値を求めよ.

$\triangle POH$ ができる x の範囲は $0 < x < 6$

$\triangle POH$ の面積を S とおくと、

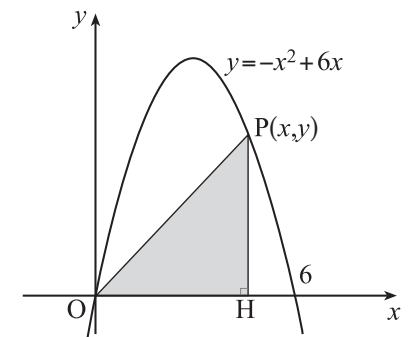
$$S = \frac{1}{2}OH \cdot PH = \frac{1}{2}x(-x^2 + 6x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2$$

$$S' = -\frac{3}{2}x^2 + 6x = -\frac{3}{2}x(x - 4)$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4, \quad S' > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

右の増減表より、 S は $x = 4$ のとき最大で、最大値は 16

(答) $x = 4$ のとき $\triangle POH$ の面積は最大になり、最大値は 16.



a	0	...	4	...	6
S'	0	+	0	-	-
S	0	\nearrow	16	\searrow	0