入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
	B	1				氏 名

[1] 静止している物体を自然に落下させたとき，落下しはじめてから t 秒後までの間に落ちる距離を s m とすれば，$s = f(t) = 4.9t^2$ であることが知られている．

a) 物体が，落下しはじめて 2 秒後から 4 秒後までの間の間の平均の速さを求めよ．

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{4.9\times 4^2 - 4.9\times 2^2}{2} = \frac{4.9\times 12}{2} = 29.4\ (\mathrm{m/s})$$

b) 物体が，落下しはじめて 3 秒後から $3+h$ 秒後までの間の平均の速さを求めよ．

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3} = \frac{4.9(3+h)^2 - 4.9\times 3^2}{h} = \frac{4.9(3^2+6h+h^2-3^2)}{h}$$
$$= \frac{4.9(6h+h^2)}{h} = 4.9(6+h)\ (\mathrm{m/s})$$

c) 物体が，落下しはじめて 3 秒後の瞬間の速さを b) で求めた平均の速さの極限として求めよ．

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3} = \lim_{h\to 0} 4.9(6+h) = 29.4\ (\mathrm{m/s})$$

[2] 次の関数で，各々の場合について平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ．

a) $f(x) = x^3 - 1$，x が -1 から 2 まで変化するとき

$$\frac{f(2)-f(-)}{2-(-1)} = \frac{7-(-2)}{3} = 3$$

b) $f(x) = 3x^2 + 1$，x が a から $a+h$ まで変化するとき

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{3(a+h)^2 - 1 - (3a^2-1)}{h} = \frac{3a^2+6ah+3h^2-1-3a^2+1}{h}$$
$$= \frac{6ah+3h^2}{h} = 6a+3h$$

[3] 関数 $f(x) = (2x+1)^2$ とするとき，次の微分係数を定義を直接用いて計算せよ．

a)
$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2(-1+h)+1)^2-(2(-1)+1)^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2h-1)^2-(-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h^2-4h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h^2-4h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(4h-4) = -4$$

b)
$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2(a+h)+1)^2-(2a+1)^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2a+2h+1)^2-(2a+1)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(4a^2+8ah+4h^2+4a+4h+1)-(4a^2+4a+1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{8ah+4h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0}(8a+4h+4) = 8a+4$$

[4] 関数 $f(x) = x^3 - 1$ の $x = -1$ における微分係数 $f'(-1)$ を定義を直接用いて計算せよ．

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{((-1+h)^3-1)-((-1)^3-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1+3h-3h^2+h^3-1-(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h-3h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3-3h+h^2) = 3$$

[5] 関数 $f(x) = x^4$ の導関数 $f'(x)$ を定義を直接用いて計算せよ．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h} = \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2+4xh^2+h^3) = 4x^3$$

$\boxed{6}$ 次の関数の導関数を求めよ．（まず $f(x)$ を展開せよ．）

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x$

b) $f(x) = x(7x - 3x^2) = 7x^2 - 3x^3$

$f'(x) = 14x - 9x^2$

c) $f(x) = (2x-1)(3x+5) = 6x^2 + 7x - 5$

$f'(x) = 12x + 7$

d) $f(x) = (5x-1)^2 = 25x^2 - 10x + 1$

$f'(x) = 50x - 10$

e) $f(x) = (4x^2-1)(3x+2) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$

$f'(x) = 36x^2 + 16x - 3$

f) $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 1$

$f'(x) = 3x^2$

$\boxed{7}$ 関数 $f(x) = x^2 - x + 1$ について，次の問いに答えよ．

a) x が a から b まで変化するときの，関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b^2-b+1)-(a^2-a+1)}{b-a} = \frac{(b^2-a^2)-(b-a)}{b-a}$$
$$= \frac{(b-a)((b+a)-1)}{b-a} = b + a - 1$$

b) $x = c$ における微分係数 $f'(c)$ が，a) の平均変化率に一致するとき，$c = \dfrac{a+b}{2}$ であることを示せ．

$f'(x) = 2x - 1$ だから，$f'(c) = 2c - 1$．

$b + a - 1 = 2c - 1$ を c について解くと，$c = \dfrac{a+b}{2}$．

$\boxed{8}$ 半径 r の球の表面積 S と体積 V をそれぞれ r の関数と考え，S と V を r で微分せよ．

$S = 4\pi r^2 \Rightarrow \dfrac{dS}{dr} = 8\pi r$

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = S$ (これは偶然ではない.)

$\boxed{9}$ 次の関数 $f(x)$ について，$f'(x)$ を求め，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) > 0$

$\Leftrightarrow x < -2$　または　$x > 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x+1) > 0$

$\Leftrightarrow x < -1$　または　$x > 3$

【発展問題】

$\boxed{10}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ．

a) x が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{h}\cdot\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}$$
$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{(a+h)a} = \frac{-1}{(a+h)a}$$

b) $x = a$ における微分係数を定義に従って求めよ．

$x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は a) で求めた平均変化率の極限だから

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(a+h)a} = -\frac{1}{a^2}$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)