練習問題 1

1 【線形代数の復習】

a) 実対称行列の固有値は実数であることを Hermite 内積を用いて示せ.

b) 実対称行列は（実）直交行列によって対角化できることを示せ.

c) 実数係数の 2 次形式は適当な座標変換によって $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$, の形に書けることを示せ.

d) 実射影平面内の非退化 2 次曲線は，実数点をもてば，$xz - y^2 = 0$ と同型であることを示せ.

2 $4x^4 + 8x^2 - 8x + 5 = 0$ を解け.

3 Q_1 を $Y^2 - 6YZ - 8XZ - 3Z^2 = 0$ で定義される 2 次曲線とし， Q_2 を $YZ - X^2 = 0$ で定義される 2 次曲線とする. このとき $\lambda Q_1 + \mu Q_2 = 0$ で定義される 2 次曲線の族について調べよ. とくにこの族に含まれる退化した 2 次曲線を求めよ.

4 2 つの 2 次曲線の交わり方にはどれだけの可能性があるか. すべてについて，ひとつずつ具体例を挙げよ. また，2 つの 2 次曲線からできる 2 次曲線の族に含まれる退化した 2 次曲線を求めよ.

5 k を標数が 2 ではない体，V を 3 次元 k-線形空間とし，$q : V \to K$ を V 上の 2 次形式とする. q が 2 次形式であるとは,

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{2}\big(q(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - q(\boldsymbol{u}) - q(\boldsymbol{v})\big), \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$$

で定義される写像 $b : V \times V \to k$ が双線形形式であることである. b を q に付随した**極形式**と呼ぶ. 2 次形式 q が**非退化**であるとは，極形式 b が非退化であること，すなわち任意の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し，$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$ となる $\boldsymbol{v}$ が存在することである.

a) いま，2 次形式 q は非退化であり，さらに $\mathbf{0}$ 以外のベクトル $\boldsymbol{e}_1$ で $q(\boldsymbol{e}_1) = 0$ となるようなものがあると仮定する. このとき， $\boldsymbol{e}_1$ を含む V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を適当に選べば次のように表せることを示したい.

$$q(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1x_3 + ax_2^2, \quad a \in k^\times$$

i) $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}) = 1$ となる $\boldsymbol{f}$ が存在することを示せ.

ii) $\boldsymbol{e}_3 = \lambda\boldsymbol{e}_1 + \mu\boldsymbol{f}$ とおき，$b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = 1/2$, $b(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 0$ となるように，λ, μ を定めよ.

iii) $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ で張られる V の部分空間を $W = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ とし，$\boldsymbol{g}$ を W には属さない V のベクトルとする. $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{g} + \lambda\boldsymbol{e}_1 + \mu\boldsymbol{e}_3$ とおき，$b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 0$, $b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0$ となるように，λ, μ を定めよ.

iv) 上記の結論を導け.

b) a) を用いて，射影平面 $\mathbb{P}^2$ の非退化 2 次曲線は k 上定義された点を少なくともひとつ持つとき， $xz - y^2 = 0$ と同型であることを示せ.

6 $\mathbb{P}^2$ を k 上の射影平面とする. $\mathbb{P}^2$ の 3 点 $P_i(x_i : y_i : z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$ が同一直線上にあるとは，(x_i, y_i, z_i), $(i = 1, 2, 3)$ が一つの同次 1 次式 $ax + by + cz = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ をみたすことをいう.

a) 3 点 P_i, $(i = 1, 2, 3)$ が同一直線上にあることと，3 つのベクトル $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$, $(i = 1, 2, 3)$ が 1 次独立であることが同値であることを示せ.

b) 3 点 P_i, $(i = 1, 2, 3)$ が同一直線上にないとき，P_i をそれぞれ $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ に移すような座標変換が存在することを示せ.

c) 4 点 P_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ のうちどの 3 点も同一直線上にないとする．このとき，P_i をそれぞれ $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$, $(1 : 1 : 1)$ に移すような座標変換が存在することを示せ.

d) 5 点 P_i, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ のうちどの 3 点も同一直線上にないとする．このとき，P_i をすべて通るような非退化 2 次曲線が存在することを示せ.

7 この問題では 3 次方程式 $x^3 + Ax + B = 0$ の解法について考察する.

a) t をパラメータとする 3 次曲線の族

$$C_t : \quad x^3 + y^3 + z^3 - txyz = 0$$

について考える. $t = 3$ のとき曲線 C_3 は 3 つの直線に分解されることを示せ．[多項式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ は $x + y + z$ で割り切れることに注意せよ.]

b) 3 次方程式 $x^3 + Ax + B = 0$ を解くためには,

$$-3yz = A \quad \text{かつ} \quad y^3 + z^3 = B. \tag{1}$$

をみたす実数 y と z を見つければよいことを示せ.

c) $\eta = y^3$, $\zeta = z^3$ とおく． y と z が上式 (1) をみたすとすると η, ζ は $u^2 - Bu - A^3/27 = 0$ の 2 つの解であることを示せ.

d) $x^3 + Ax + B = 0$ の解の公式を求めよ.

e) 上で得られた解の公式を $x^3 - 7x + 6 = 0$ に適用して解を求めよ.

f) $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$ と因数分解されるので， 上の方程式の解は 1, 2, -3 である．上で求めた解とどのように対応するかを調べよ.

【参考書】

- Miles Reid, “Undergraduate Algebraic Geometry”, London Mathematical Society（邦訳あり）
  4 次方程式の 2 次曲線による解き方はこの本に書いてある．3 次曲線についても詳しく書いてある.
- 永田雅宜，初学者のための代数幾何，現代数学社
  かつて「高校生のための」と謳っていたが，Undergraduate 用の上記の本より内容は濃いかもしれない．E-Book として中大の図書館を通じて Web 上で閲覧可.
- William Fulton, “Algebraic Curves”, Benjamin
  `https://users.math.msu.edu/users/magyarp/Math419H/Fulton-Alg-Curves.pdf` よりダウンロード可．代数曲線の入門書の定番．可換環に関する練習問題が豊富.
- Devid Eisenbud, “Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics, Vol 150)”, Springer Verlag
  上記の代数曲線の入門書には微分形式の理論が書かれていないが，この本には丁寧に解説されている.
- 梶原 健 「代数曲線入門」日本評論社
  レベルは高いかもしれないが厳密に丁寧に書かれている．微分形式についても触れられている.

担当： 鍬田 政人 (`kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp`)