

以下の式はその他の主な関数の漸近展開である．一般の関数の漸近展開はこれらの式から和・差・積・商および合成の操作を組み合わせて求めることができる．

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
 (2) \quad & (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\
 & \quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
 (3) \quad & e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 (4) \quad & \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
 (5) \quad & \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
 (6) \quad & \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})
 \end{aligned}$$

例1 (1)式は

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \varepsilon_n(x^n)$ と表したとき, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n(x)}{x^n} = 0$ が成り立つことを意味する．ここで, x を $-x$ に置き換えると,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \cdots + x^n + \varepsilon_n(-x) \\
 &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \varepsilon_n(-x)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n(-x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n(-x)}{(-1)^n(-x)^n} = (-1)^n \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n(X)}{X^n} = 0$$

ここで, 2 番目の等号では $X = -x$ とおいた．したがって, 次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

例2 同様に, (1)式において x を x^2 におきかえると,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x^2} &= 1 + (x^2) + (x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + \cdots + (x^2)^n + \varepsilon_n(x^2) \\
 &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots + \varepsilon_n(x^2)
 \end{aligned}$$

と書くことができ, さらに,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n(x^2)}{(x^2)^n} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_n(X^n)}{X^n} = 0$$

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
		B	1			氏 名	

が成り立つ (2 番目の等号では $X = (-x)^2$ とおいた)．すなわち, $\varepsilon_n((-x^2)^n)$ は $o(x^{2n})$ に属する無限小である．ここまでの議論を省略して, 次のように書いて構わない．

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \frac{1}{1-x^2} = 1 + (x^2) + (x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + \cdots + o((x^2)^n) \\
 & = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})
 \end{aligned}$$

また, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$ が成り立つので,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{2n-1} + x^{2n} + \varepsilon_{2n}(x) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_{2n}(x)}{x^{2n}} &= 0 \\
 \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots - x^{2n-1} + x^{2n} + \eta_{2n}(x) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{2n}(x)}{x^{2n}} &= 0
 \end{aligned}$$

が成り立つ．これらの式を辺々足し合わせて 2 で割ると

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots + x^{2n} + \frac{\varepsilon_{2n}(x) + \eta_{2n}(x)}{2}$$

であり, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{2n}(x) + \varepsilon_{2n}(x)}{2x^{2n}} = 0$ より, (7) 式が得られる．これを略記して次のように書いて構わない．

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{2n-1} + x^{2n} + o(x^{2n}) \\
 +) & \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots - x^{2n-1} + x^{2n} + o(x^{2n}) \\
 \hline
 & \frac{2}{1-x^2} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + \cdots + 2x^{2n} + o(x^{2n}) \\
 & \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})
 \end{aligned}$$

1 次の関数の $x = 0$ のまわりの漸近展開を () 内の次数の項まで求めよ．

a) $\sqrt{1+x}$ (x^5 の項まで)

b) $\sqrt[3]{1+x}$ (x^4 の項まで)

2 次の関数の $x = 0$ のまわりの漸近展開を () 内の次数の項まで求めよ.

a) $\frac{x}{1+x^3}$ (x^7 の項まで)

b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (x^6 の項まで)

c) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (x^4 の項まで)

d) $\log(1-x^2)$ (x^8 の項まで)

3 a) 関数 $f(x) = \log(1+x) - xe^x$ の $x = 0$ のまわりでの漸近展開を 4 次の項まで求めよ.

b) 漸近展開を用いて極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - xe^x}{x^2}$ を求めよ.

4 漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x - x^2}{x - \log(1+x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$