2026 年 1 月 20 日

微分積分 II	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ.

a) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-3}\,dx$　（$2x-3=t$ とおく.）

$2x-3=t$ とおくと，$x=\frac{1}{2}(t+3)$ だから，$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$ となる.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{2x-3}\,dx &= \int \frac{1}{2}(t+3)\sqrt{t}\cdot\left(\frac{1}{2}\,dt\right) = \frac{1}{4}\int (t+3)\cdot t^{\frac{1}{2}}\,dt\\ &= \frac{1}{4}\int (t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}})\,dt\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}}\right)+C\\ &= \frac{1}{10}\left(\sqrt{2x-3}\right)^5+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-3}\right)^3+C\\ &= \frac{1}{5}(x+1)\left(\sqrt{2x-3}\right)^3+C\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int (2x-1)\log(x-1)\,dx$

（$f(x)=\log(x-1)$, $g'(x)=2x-1$ とおいて部分積分）

$f(x)=\log(x-1)$ とし，$g'(x)=2x-1$ となるように $g(x)=x^2-x$ とおく．部分積分の公式を用いると，

$$\begin{aligned}&\int (2x-1)\log(x-1)\,dx\\ &= (x^2-x)\log(x-1)-\int (x^2-x)(\log(x-1))'\,dx\\ &= x(x-1)\log(x-1)-\int \frac{x(x-1)}{x-1}\,dx\\ &= x(x-1)\log(x-1)-\frac{1}{2}x^2+C\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{1+x}$ とおく.

a) $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ をそれぞれ計算せよ.

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$
$$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

b) h を正の実数とする．$\sqrt{1+h}$ を $f(0)+f'(0)h+\dfrac{f''(0)}{2!}h^2$ で近似したときの誤差 $R_3(h)$ を評価する不等式を求めよ.

$f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$ は $0\leqq x\leqq h$ において単調に減少するので，$x=0$ のときの値が最大値になる．また，$f'''(x)$ は常に正だから，

$$0\leqq f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{5/2}}\leqq\frac{3}{8(1+0)^{5/2}}=\frac{3}{8}$$

したがって，

$$0\leqq R_3(h)\leqq\frac{\left(\frac{3}{8}\right)}{3!}h^3=\frac{1}{16}h^3$$

と評価できる.

c) $\sqrt{45}=6\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ という表示と，b) の近似式を用いて $\sqrt{45}$ の近似値を計算せよ．また，このようにして得られた近似値と $\sqrt{45}$ の値とは小数第何位まで一致するかを言え.

$\sqrt{1+h}=1+\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+R_3(h)$ において $h=\dfrac{1}{4}$ とおいて，

$$\begin{aligned}\sqrt{45}=6\sqrt{1+\tfrac{1}{4}}&=6\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right)+6R_3\left(\tfrac{1}{4}\right)\\ &=6.703125+6R_3\left(\tfrac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

となる．前問より $0\leqq 6R_3\left(\frac{1}{4}\right)\leqq 6\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^3=0.005859375$ だから，

$$6.703125\leqq\sqrt{45}\leqq 6.703125+0.005859375=6.708984375$$

となる．これより，$\sqrt{45}$ の小数点以下第 2 位までの値は 6.70 であることがわかる.

$\boxed{3}$ a) 関数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ の漸近展開を利用して $g(x)=x\sqrt{1-x}$ の $x=0$ のまわりでの漸近展開を 4 次の項まで求めよ.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+o(x^3)$ であるが，
$\boxed{2}$ a) より，$f(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+o(x^3)$
$g(x)=xf(-x)$ だから，

$$\begin{aligned}g(x)&=x\left(1+\frac{1}{2}(-x)-\frac{1}{8}(-x)^2+\frac{1}{16}(-x)^3+o((-x)^3)\right)\\ &=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{16}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

b) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x\sqrt{1-x}}{x^3}$ を求めよ.
ここで，次の展開式は用いてよい.
$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$\log(1+x)$ の漸近展開の式より

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

また，前問より

$$x\sqrt{1-x}=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3+o(x^3)$$

したがって，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x\sqrt{1-x}}{x^3}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{11}{24}x^3+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{11}{24}+o(1)\right)\\ &=\frac{11}{24}\end{aligned}$$

4 つぎの 2 変数関数のそれぞれについて，2 階の偏微分までをすべて計算せよ．

a) $f(x,y) = \log(x^2+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2+y}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2(x^2-y)}{(x^2+y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{(x^2+y)^2}$$

b) $f(x,y) = (x-y)e^{-(x+y)}$ (α は $0<\alpha<1$ をみたす定数)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-x+y+1)e^{-(x+y)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-x+y-1)e^{-(x+y)}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (x-y-2)e^{-(x+y)}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (x-y)e^{-(x+y)}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (x-y)e^{-(x+y)}.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (x-y+2)e^{-(x+y)}.$$

5 関数 $f(x,y) = x^3+3xy^2-3x^2-3y^2$ の臨界点（すべての偏微分が 0 になる点）をすべてもとめ，各臨界点において極大・極小を判定せよ．

まず，臨界点（偏微分がともに 0 になる点）を求めるために，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+3y^2-6x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy-6y = 0$$

を解く．2 番目の式は $6y(x-1)=0$ となるので，$x=1$ または $y=0$.
$x=1$ のとき，1 番目の式は $3y^2-3 = 3(y+1)(y-1) = 0$ だから $y=1$ または $y=-1$.
$y=0$ のとき，1 番目の式は $3x^2-6x = 3x(x-2) = 0$ だから $x=0$ または $x=2$.
よっち，臨界点は $(x,y) = (1,1)$，$(1,-1)$，$(0,0)$，$(2,0)$ の 4 つ．

次に $D(x,y)$ を計算し，極大・極小の判定法を用いる．

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 \\ &= (6x-6)(6x-6)-(6y)^2 = 36(x-1)^2-36y^2 \end{aligned}$$

- $D(1,1) = -36 < 0$ であるから，$(1,1)$ は $f(x,y)$ の鞍点（峠点）.
- $D(1,-1) = -36 < 0$ であるから，$(1,-1)$ は $f(x,y)$ の鞍点（峠点）.
- $D(0,0) = 36 > 0$ であり，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -36 < 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大となる．
- $D(2,0) = 36 > 0$ であり，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) = 36 > 0$ であるから，$f(x,y)$ は $(2,0)$ で極小となる．

6 底面の半径が r で高さが h である上面に蓋のない円柱の缶がある．

a) この缶を作るのに使用する材料の面積を S，缶の容積を V とするとき，S，V をそれぞれ r と h を用いた式で表せ．

$S = \ \pi r^2 + 2\pi rh$

$V = \ \pi r^2 h$

b) 容積 V が一定値 $a^3\pi$（a は正数）であるという条件の下で，使用する材料の面積 S が最小となるような r と h をラグランジュの乗数法で求めよ．

$L(r,h,\lambda) = \pi r^2 + 2\pi rh - \lambda(\pi r^2 h - a^3\pi)$ とおく．偏微分を計算し，それぞれを 0 とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a} = 2\pi r + 2\pi h - \lambda(2\pi rh) = 0 & \cdots ① \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = 2\pi r - \lambda(\pi r^2) = 0 & \cdots ② \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(\pi r^2 h - a^3\pi) = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①より $2\pi r + 2\pi h = \lambda(2\pi rh)$ $\cdots ①'$
②より $2\pi r = \lambda(\pi r^2)$ $\cdots ②'$

$$\frac{①'}{②'} \text{ より } \quad \frac{2\pi r + 2\pi h}{2\pi r} = \frac{\lambda(2\pi rh)}{\lambda(\pi r^2)} \Rightarrow \frac{r+h}{r} = \frac{2h}{r} \Rightarrow r = h$$

$r=h$ を③に代入すると，$-(\pi h^3 - a^3\pi) = 0$.
したがって，$h=a$ であり，このとき r も $r=a$ となる．

（答）$r=a$ のとき材料の面積 S は最小になる．（最小値 $= 3a^2\pi$）