

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1					氏名

1 不定積分 $\int x\sqrt{3x-1} dx$ を以下の方法で求めよ.

a) $3x-1=t$ とおいて求めよ.

$$3x-1=t \text{ とおくと, } x=\frac{t}{3}+\frac{1}{3}. \text{ このとき, } \frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{3x-1} dx &= \int \frac{t+1}{3}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3} dt = \frac{1}{9} \int \left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right) dt = \frac{2}{45}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{27}t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

b) $\sqrt{3x-1}=t$ とおいて求めよ.

$$\sqrt{3x-1}=t \text{ とおくと, } x=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{3}. \text{ このとき, } \frac{dx}{dt}=\frac{2t}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx &= \int \frac{t(t^2+1)}{3}\cdot\frac{2t}{3} dt = \frac{2}{9} \int (t^4+t^2) dt = \frac{2}{45}t^5 + \frac{2}{27}t^3 + C \\ &= \frac{2}{45}(3x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{27}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

2 次の不定積分を求めよ.

a) $\int x(3x^2+2)^3 dx$

b) $\int \frac{1}{x \log x} dx$

a) $t=3x^2+2$ とおくと, $\frac{dt}{dx}=6x$ だから, 形式的に $x dx = \frac{1}{6} dt$.

$$\therefore \int x(3x^2+2)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{6} dt = \frac{1}{24}t^4 + C = \frac{1}{24}(3x^2+2)^4 + C$$

b) $t=\log x$ とおくと, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ だから, 形式的に $dt=\frac{1}{x}dx$.

$$\therefore \int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{\log x} \cdot \left(\frac{1}{x} dx\right) = \int \frac{1}{t} dt = \log t + C = \log(\log x) + C$$

c) $\int (x+1)e^x dx$

d) $\int \log(x+1) dx$

c) $u=x+1, v'=e^x$ とおいて, 部分積分 $\int uv' = uv - \int u'v$ を用いる. このとき $v=e^x$ だから

$$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int 1 \cdot e^x dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

d) $u=\log(x+1), v'=1$ とおいて, 部分積分を用いる. このとき $v=x$ となることに注意.

$$\begin{aligned} \int \log(x+1) dx &= x \log(x+1) - \int x \cdot \frac{1}{x+1} dx = x \log(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= x \log(x+1) - (x - \log x) + C = (x+1) \log(x+1) - x + C \end{aligned}$$

3 $\sqrt{17}=4\sqrt{1+\frac{1}{16}}$ という表示と $\sqrt{1+x}$ の2次近似の式を用い $\sqrt{17}$ の近似値を求めよ. また, このようにして得られた近似値と $\sqrt{17}$ の値とは小数第何位まで一致するかを答えよ.

$f(x)=\sqrt{1+x}$ とおいて, 高次微分による近似式で $n=3, h=\frac{1}{16}$ とする. まず, 近似値は $\sqrt{1+h}=1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+R_3(h)$ より,

$$\sqrt{17}=4\sqrt{1+\frac{1}{16}}=4+\frac{4}{2}\frac{1}{16}-\frac{4}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^2=4.123046875$$

近似の誤差は, $0 \leq f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \leq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$ より,

$$0 \leq 4R_3\left(\frac{1}{16}\right) \leq 4\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^3=0.0000610352\dots$$

と評価できる. すなわち,

$$4.123046875 \leq \sqrt{17} \leq 4.123046875 + 0.0000610352\dots = 4.123107910\dots$$

となる. これより, $\sqrt{17}$ の小数点以下第3位までの値は4.123であることがわかる. (小数第4位は0または1であることもわかる.)

4 漸近展開を用いて次の極限を求めよ.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1}$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2+o(x^2)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2) \text{ であるが,}$$

この式で x を $-x$ に置き換えて, $\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ も成り立つ. したがって,

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))-(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))=x+o(x^2).$$

一方, $e^x=x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ だから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+o(x^2)}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+o(x)}{1+\frac{x}{2}+o(x)} = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{x + \log(1-x)}$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3), \log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3) \text{ より}$$

$$\begin{cases} \log(1+x) + \log(1-x) = -x^2 + o(x^3) \\ x + \log(1-x) = x + (-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3) \end{cases}$$

したがって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{x + \log(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^3)}{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1+o(x)}{-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+o(x)} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$$

5 つぎの2変数関数について、各変数に2階までの偏微分をすべて計算せよ。

a) $f(x, y) = x^4 - 4x^2y^2 + 3xy^3 - y^4 + 3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x^3 - 8xy^2 + 3y^3, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -8x^2y + 9xy^2 - 4y^3, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 12x^2 - 8y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -16xy + 9y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -8x^2 + 18xy - 12y^2\end{aligned}$$

c) $f(x, y) = x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{5}}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{2}{5}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\frac{6}{25}x^{-\frac{8}{5}}y^{\frac{3}{5}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{6}{25}x^{-\frac{3}{5}}y^{-\frac{2}{5}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\frac{6}{25}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{7}{5}}\end{aligned}$$

b) $f(x, y) = (x + 2y^2 + 1)^3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3(x + 2y^2 + 1)^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 12y(x + 2y^2 + 1)^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6(x + 2y^2 + 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 24y(x + 2y^2 + 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 12(x + 10y^2 + 1)(x + 2y^2 + 1)\end{aligned}$$

d) $f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2x}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-2x(3 - x^2 + 3y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{-2y(1 - 3x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-2x(1 + x^2 - 3y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3}\end{aligned}$$

6 次の関数の臨界点を求め、各臨界点において極大・極小を判定せよ。

a) $f(x, y) = x^3 - 6x^2 + x^2y^2 - y^2$

まず、臨界点（偏微分がともに0になる点）を求めるために、連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 12x + 2xy^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y - 2y = 0$$

を解く。2番目の式から $y(x - 1)(x + 1) = 0$ が得られるので、 $y = 0, x = 1, x = -1$ をそれぞれ最初の式に代入し、 $(x, y) = (0, 0), (4, 0), (1, \pm 3\sqrt{2}/2), (-1, \pm \sqrt{30}/2)$ を得る。次に $D(x, y)$ を計算し、極大・極小の判定法を用いる。

$$\begin{aligned}D(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2 = (6x - 12 + 2y^2)(2x^2 - 2) - (4xy)^2 \\ &= 4(3x^3 - 6x^2 - 3y^2x^2 - y^2 - 3x + 6)\end{aligned}$$

- $D(0, 0) = 24 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -12 < 0$ であるから、 $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極大。
- $D(4, 0) = 360 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4, 0) = 12 > 0$ であるから、 $f(x, y)$ は $(4, 0)$ で極小。
- $D(1, \pm 3\sqrt{2}/2) = -72 < 0$ なので、 $(1, \pm 3\sqrt{2}/2)$ は鞍点（峠点）。
- $D(-1, \pm \sqrt{30}/2) = -120 < 0$ なので、 $(-1, \pm \sqrt{30}/2)$ は鞍点（峠点）。

b) $f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$

5 d) の結果を利用する。まず臨界点を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow 1 - x^2 + y^2 &= 0 \text{かつ} -2xy = 0 \\ \Leftrightarrow 1 - x^2 + y^2 &= 0 \text{かつ} 「x = 0 \text{または} y = 0」 \\ \Leftrightarrow (x, y) &= (1, 0) \text{または} (-1, 0) (x = 0 \text{のとき}, 1 + y^2 = 0 \text{の実数解はない。})\end{aligned}$$

$D(x, y)$ を計算し、極大・極小を判定すると以下のようになる。

• $D(1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0)\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - 0^2 = \frac{1}{4} > 0$.

さらに、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -\frac{1}{2} < 0$ であるから、 $f(x, y)$ は $(1, 0)$ で極大。

• $D(-1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 0)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - 0^2 = \frac{1}{4} > 0$.

さらに、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = \frac{1}{2} > 0$ であるから、 $f(x, y)$ は $(-1, 0)$ で極小。

7 底面が1辺 a の正方形で高さが h である上面に蓋のない直方体の缶がある。

a) この缶を作るのに使用する材料の面積を S とするとき、 S を a と h で表わせ。

$$S(a, h) = (\text{底面積}) + (\text{側面積}) = a^2 + 4ah.$$

b) 材料の面積 S が一定値であるという条件の下で、容積 V が最大となるような a と h をラグランジュの乗数法で求めよ。

材料の面積が一定値 S_0 であるとして、 $L(a, h, \lambda) = V(a, h) - \lambda(S(a, h) - S_0)$ とおく。 $V(a, h) = a^2h$ であるから、

$$L(r, h, \lambda) = a^2h - \lambda(a^2 + 4ah - S_0)$$

偏微分を計算し、それぞれを0とおくと、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial a} = 2ah - \lambda(2a + 4h) = 0 \quad \dots \text{①} \\ \frac{\partial L}{\partial h} = a^2 - \lambda(4a) = 0 \quad \dots \text{②} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(a^2 + 4ah - S_0) = 0 \quad \dots \text{③} \end{array} \right.$$

$$\text{①より } 2ah = \lambda(2a + 4h) \quad \dots \text{①}'$$

$$\text{②より } a^2 = \lambda(4a) \quad \dots \text{②}'$$

$$\begin{aligned} \text{①}' \text{より } \frac{2ah}{a^2} &= \frac{\lambda(2a + 4h)}{\lambda(4a)} \Rightarrow \frac{2h}{a} = \frac{a + 2h}{2a} \Rightarrow a = 2h \\ &\text{a = 2h を ③ に代入すると, } -(a^2 + 4ah - S_0) = 0 \text{ より, } 12h^2 = S_0. \text{ したがって, } h = \sqrt{S_0/12}. \\ &a = 2\sqrt{S_0/12} = \sqrt{S_0/3}. \end{aligned}$$

(答) $a = \sqrt{S_0/3}, h = \sqrt{S_0/12}$ のとき体積 V は最大になる。