微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{-x+4}{2x-3}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

分母 $\neq 0$ より，$x \neq \frac{3}{2}$.（正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{3}{2}\}$）

b) $f(x)$ を $a + \dfrac{b}{2x-3}$ の形に表せ.

$3x-4$ を $x-2$ で割ると，商は $-\frac{1}{2}$, 余りは $\frac{5}{2}$ だから，$\dfrac{-x+4}{2x-3} = -\frac{1}{2} + \dfrac{\frac{5}{2}}{2x-3}$

c) x が -1 から $-1+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ.

$f(-1+h) = \dfrac{-(-1+h)+4}{2(-1+h)-3} = \dfrac{-h+5}{2h-5}$, $f(-1) = \dfrac{-(-1)+4}{2(-1)-3} = -1$ より，

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\frac{-h+5}{2h-5} - (-1)}{h} = \frac{-h+5+(2h-5)}{h(2h-5)}$$

$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(2h-5)} = \frac{1}{2h-5}$$

d) $f(x)$ の $x = -1$ における微分係数を極限による定義を用いて直接計算せよ.

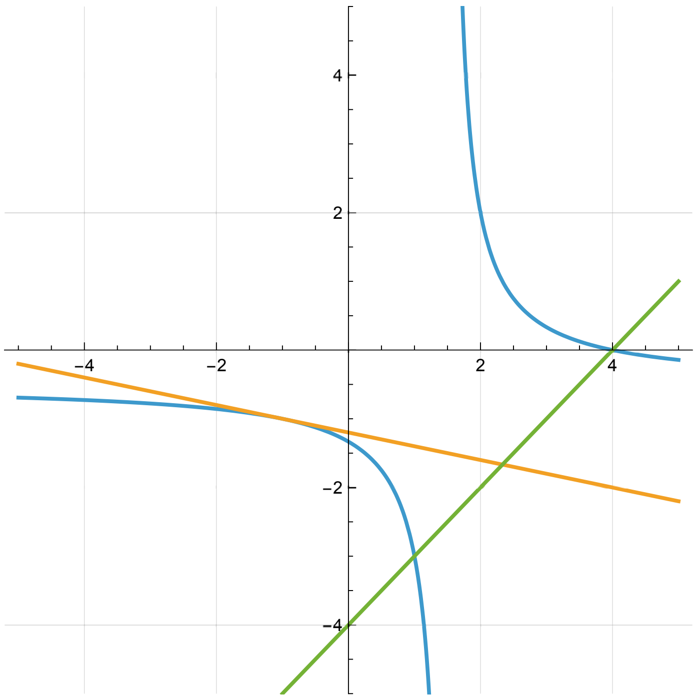
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h-5} = \frac{1}{0-5} = -\frac{1}{5}$$

e) $y = f(x)$ のグラフの $(-1, f(-1))$ における接線の方程式を求めよ.

$f(-1) = -1$，$f'(-1) = -\frac{1}{5}$ なので，接線は $(-1,-1)$ を通り，傾き $-\frac{1}{5}$ の直線.

$y + 1 = -\frac{1}{5}(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}$

f) $y = f(x)$ のグラフ，e) で求めた接線，および直線 $y = x - 4$ を下の座標平面内に描け.



g) 次の連立方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} y = \dfrac{-x+4}{2x-3} \\ y = x - 4 \end{cases}$$

y を消去して，$\frac{-x+4}{2x-3} = x - 4$．分母を払って，

$-x+4 = (2x-3)(x-4) \Leftrightarrow -x+4 = 2x^2 - 11x + 12$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1, 4$

$x = 1$ のとき $y = -3$，$x = 4$ のとき $y = 0$.

(答) $(x, y) = (1, -3), (4, 0)$

h) グラフを利用して不等式 $\dfrac{-x+4}{2x-3} \leqq x - 4$ を解け.

$y = \dfrac{-x+4}{2x-3}$ のグラフが直線 $y = x - 4$ より下にある x の範囲を求めればよい．グラフより，$1 \leqq x < \frac{3}{2}$ または $x \geqq 4$.

i) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

$y = \dfrac{-x+4}{2x-3}$ を x について解く．まず，両辺に $2x-3$ をかけて，

$(2x-3)y = -x+4$．これを x について整理すると $(2y+1)x = 3y+4$.

この方程式は $y \neq -\frac{1}{2}$ のときのみ解を持ち，その解は $x = \dfrac{3y+4}{2y+1}$.

したがって，$f^{-1}(y) = \dfrac{3y+4}{2y+1}$．ここで，$x$ と y を入れ換えて，

$f^{-1}(x) = \dfrac{3x+4}{2x+1}$.

j) $y = f(x)$ および，$y = f^{-1}(x)$ の定義域・値域を示せ.

$y = f(x)$

$$\begin{cases} \text{定義域：} & x \neq \frac{3}{2} \\ \text{値域：} & y \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y = f^{-1}(x)$

$$\begin{cases} \text{定義域：} & x \neq -\frac{1}{2} \\ \text{値域：} & y \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ n が正の整数であるとき $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることはすでに証明されているとする．このとき，商の微分公式を用いて $\left(x^{-n}\right)'$ を求め，微分公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が $a = -n$ のときにも成り立つことを証明せよ.

$(x^{-n})' = \left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ だから，$g(x) = x^n$ とおいて，商の微分公式

$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \dfrac{-g'(x)}{g(x)^2}$ を用いる．$g'(x) = nx^{n-1}$ だから，

$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$.

よって，$a = -n$ のときにも $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が成り立つことが示された.

$\boxed{3}$ $f(x) = \sqrt{-2x+7}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

根号内 $\geqq 0$ より，$-2x+7 \geqq 0 \Leftrightarrow x \leqq \frac{7}{2}$

$\sqrt{}$ は正または 0 の値をとるので，値域は $y \geqq 0$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y = \sqrt{-2x+3}$ の両辺を 2 乗し，$y^2 = -2x+7$．これを x について解くと，

$x = -\frac{1}{2}(y^2-7)$．ここで，x と y を入れ換えて，$y = -\frac{1}{2}(x^2-7)$．

したがって，$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x^2-7)$ である．

$y = f^{-1}(x)$ の定義域は $y = f(x)$ の値域に対応して制限され，$x \geqq 0$.

また，値域は $y = f(x)$ の定義域に対応して，$y \leqq \frac{7}{2}$.

c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = \left((-2x+7)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-2+7)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x+7)'$$

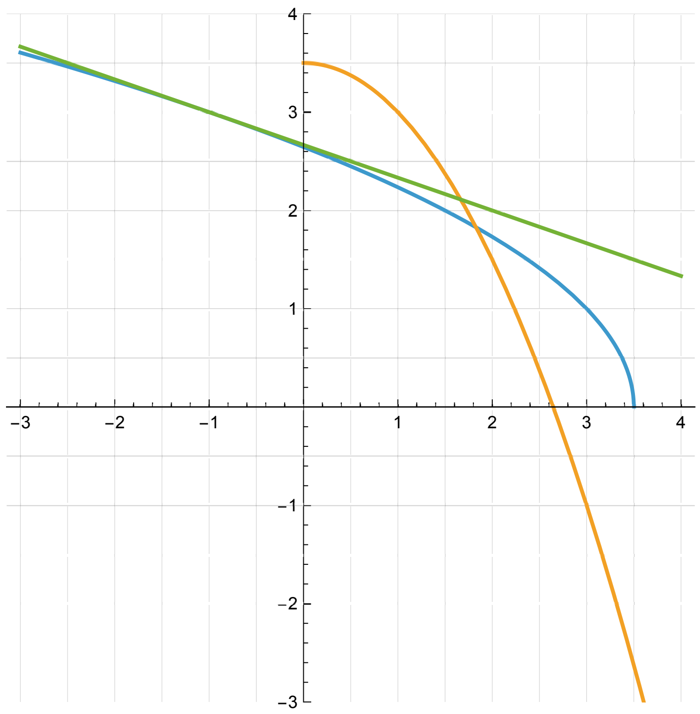
$$= \frac{1}{2}(-2x+7)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2) = \frac{-1}{\sqrt{-2x+7}}$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $(-1, f(-1))$ における接線の方程式を求めよ．

$f(-1) = 3$，$f'(-1) = -\frac{1}{3}$ なので，接線は $(-1, 3)$ を通り，傾き $-\frac{1}{3}$ の直線．

$y - 3 = -\frac{1}{3}\cdot(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$(-1, f(-1))$ における接線，および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



$\boxed{4}$ $f(x) = x^2 + \log(4-x^2)$ とする．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域を求めよ．

真数条件より，$4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を計算せよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = 2x + \frac{(4-x^2)'}{4-x^2} = \frac{2x(4-x^2)-2x}{4-x^2}$$

$$= \frac{2x(3-x^2)}{4-x^2}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ．

$f'(x) = \dfrac{2x(3-x^2)}{4-x^2} = 0$ より，$x(3-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$.

d) $f'(x) > 0$ となる x の値の範囲を求めよ．

$4 - x^2$ は定義域内で正の値をとるので，$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(3-x^2) > 0$.

これを解き，$-2 < x < 2$ とあわせて $-2 < x - \sqrt{3}$，または $0 < x < \sqrt{3}$

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ．

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	$2\log 2$	$\nearrow$	3	$\searrow$	

f) $f(x)$ が定義される範囲内での極大値・極小値があればそれを求めよ．

極小値： $2\log 2$ $(x = 0)$

極大値： 3 $(x = \pm\sqrt{3})$.

$\boxed{5}$ 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = x\sqrt{1-x}$

$$f'(x) = (x)'\sqrt{1-x} + x\left(\sqrt{1-x}\right)' = \sqrt{1-x} + x\left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= \sqrt{1-x} + x\cdot\tfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x)'$$

$$= \sqrt{1-x} + \frac{-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x^5+5}$

$$f'(x) = \left((2x^5+5)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$= \tfrac{1}{3}(2x^5+5)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(2x^5+5)'$$

$$= \tfrac{10x^4}{3}(2x^5+5)^{\frac{-2}{3}}$$

$$= \frac{10x^4}{3\sqrt[3]{(2x^5+5)^2}}$$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x+5)'(x-2)^2 - (x^2-4x+5)\left((x-2)^2\right)'}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x+5)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{2(x-2)^2 - 2(x^2-4x+5)}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{2(x^2-4x+4-(x^2-4x+5))}{(x-1)^3} = \frac{-2}{(x-2)^3}$$

【2 枚目につづく】

2025 年 7 月 22 日

微分積分 I	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

6 $f(x) = x^2e^{-x}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

定義域は実数全体（の集合 $\mathbb{R}$）

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$$f'(x) = (x^2)'e^{-x} + x^2\left(e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-x)'$$
$$= x(2-x)e^{-x}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

e^{-x} は常に正の値をとることにあることに注意する.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ または 2

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(2-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

$$f''(x) = (x(2-x))'e^{-x} + x(2-x)\left(e^{-x}\right)'$$
$$= (2-2x)e^{-x} - x(2-x)e^{-x}$$
$$= (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2 - \sqrt{2}$ または $x > 2 + \sqrt{2}$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ.（増減だけでなくグラフの凹凸も調べ，曲がった矢印 ⤴ ↱ ↳ ⤵ で表すこと.）

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↳	極小	⤴	変曲点	↱	極大	⤵	変曲点	↳

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ.

極大： $x = 2$

極小： $x = 0$

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ.

$x = 2 - \sqrt{2}$，$2 + \sqrt{2}$

7 曲線 $y = x - \log x$ の接線で，$(0, -1)$ を通るものの方程式を求めよ. また，その接点の座標を求めよ.

$f(x) = x - \log x$ とおくと，$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ なので，

$y = x - \log x$ の $(a, a - \log a)$ における接線の方程式は

$$y - (a - \log a) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)(x - a)$$
$$\Leftrightarrow y = \left(1 - \frac{1}{a}\right)x + 1 - \log a$$

ここで，$(x, y) = (0, -1)$ とおくと，$1 - \log a = -1 \Leftrightarrow a = e^2$

したがって，求める接線の方程式は $y = \left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right)x - 1$

また，接点は $(e^2, e^2 - 2)$

8 元本 A を年利 r の連続複利で運用すると，1 年後の元利合計は Ae^r となる. 8 年後に元本がもとの 2 倍以上になるためには，年利はおよそ何 % 以上でなければいけないか. $\log 2 = 0.693$ として計算せよ.

8 年後の元利合計は $A(e^r)^8 = Ae^{8r}$.

これが 2 倍以上になるには，$Ae^{8r} \geqq 2A$ とならなければならない.

$e^{8r} \geqq 2$ の両辺の自然対数をとり，$\log e^{8r} \geqq \log 2 \Leftrightarrow 8r \geqq \log 2$.

よって，$r \geqq \frac{\log 2}{8} \fallingdotseq \frac{0.693}{8} = 0.0866434\cdots$

すなわち，およそ 8.7% 以上なら 8 年後に 2 倍以上になる.

— 以上 —

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】