

復習問題 略解

$$\boxed{1} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{-h^2 - 4h}{4(2+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 4}{4(2+h)^2} = \frac{-4}{4 \times 2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{2} \quad \text{a) } \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2}{3} \quad \text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 \quad \text{c) } y = 2x - 3 \quad \text{d) 別紙参照}$$

$$\boxed{3} \quad \text{a) } \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -\sqrt{3} + 1 \quad \text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -1 \quad \text{c) } y = -x \quad \text{d) 別紙参照}$$

$$\boxed{4} \quad \text{a) 別紙グラフより, } 0 < x < 1, \quad 2 < x \quad \text{b) 別紙グラフより, } x \leq 1$$

$$\boxed{5} \quad \text{a) } (g \circ f)(x) = 1 + a - ax, \quad (f \circ g)(x) = -\frac{x}{a}.$$

b) $1 + a - ax = x$ がすべての x になつて成り立たなければ行けないので, $a = -1$. (このとき $(f \circ g)(x) = x$ も成り立っていることに注意.)

$$\boxed{6} \quad \text{a) 定義域 } x \neq -2, \text{ 値域 } y \neq 2; \text{ 逆関数 } f^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-2}, \text{ 逆関数の定義域 } x \neq 2, \text{ 値域 } y \neq -2.$$

b) 定義域 $x \leq 2$, 値域 $y \leq 0$; 逆関数 $f^{-1}(x) = 2 - x^2$, 逆関数の定義域 $x \leq 0$, 値域 $y \leq 2$.

$\boxed{7}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

$$\text{a) } f'(x) = 3(4x+5)(2x^2+5x-6)^2$$

$$\text{b) } f'(x) = (x-1)^4 + 4x(x-1)^3$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-3)^3}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{-2(3x^2-15x-1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$\text{e) } f'(x) = \frac{1-3x}{2\sqrt{2-x}}$$

$$\text{f) } f'(x) = -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{(x+4)^4}}$$

$$\text{g) } f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$$

$$\text{h) } f'(x) = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$$

$$\text{i) } f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$\boxed{8}$ a)

x	...	$-\frac{3}{2}$	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\curvearrowright$	極大	$\curvearrowleft$	変曲点	$\curvearrowright$	変曲点	$\curvearrowleft$

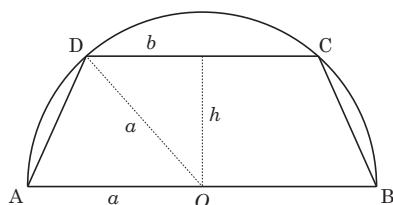
b) 極大: $x = -\frac{3}{2}$, 極小: なし [$f'(0) = 0$ であるが, $x = 0$ では極小でも極大でもないことに注意.]
変曲点: $x = -1, 0$.

9 別紙グラフ参照

10 a) 最大値 $\sqrt{2}$ ($x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき), 最小値 -1 ($x = -1$ のとき).

b) 最大値 $e^{-2} = 0.135335\dots$ ($x = 1$ のとき), 最小値 -1 ($x = 0$ のとき).

11 台形の高さを h とし, 上底の長さ (辺 CD の長さ) を $2b$ とおくと, 図のように $a^2 = b^2 + h^2$ が成り立つ.



したがって, $b = \sqrt{a^2 - h^2}$ となる. このとき, $S = \frac{2a + 2b}{2}h$ であるから, $S = h(a + \sqrt{a^2 - h^2})$.

$$\frac{dS}{dh} = \frac{a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2}{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

$\frac{dS}{dh} = 0$ となるのは $a\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - 2h^2 = 0$ のときであるが, $a\sqrt{a^2 - h^2} = -a^2 + 2h^2$ の両辺を 2 乗して整理することにより, $4h^4 = 3a^2h^2$ を得る. $h > 0$ であることに注意して $\frac{dS}{dh} = 0$ となるのは $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき. $0 < h < a$ の範囲で S の増減表を書けば (省略), $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ のとき S が最大になることがわかり, S の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

12 a) 真数条件 $1 + x > 0$ より, $x > -1$.

b) $f(x)$ を微分すると $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ であり, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 増減表を書くと,

x	-1	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$

これより, $f(x)$ は $x = 0$ のとき最大で, 最大値は $f(0) = 0$.