

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

まず例として、次のような状況を考える。長年同じ数学の講義を担当している先生が学期末試験をおこなったところ、今年度の学生の平均が従来の学生の平均より5点高かったとする。このとき、今年度の学生は例年にくらべて成績優秀と判断してよいだろうか。次の2通りの解釈が可能である。

- (1) 5点ぐらいの差は偶然起こりうるので、今年度の学生も従来の学生と特に変わらない。
- (2) 5点も平均点が高いということは、学生の能力が同じならば偶然では“めったに起こらないこと”なので、今年度の学生はいつもより成績優秀と考えてよい。

この判断には、毎年の試験の難易度がもちろん関わってくるわけだが、ここでは、この先生は毎年同じ問題を出していたとし、学生も毎年同じ条件で試験を受けていたと仮定する。それでも、この判断を下すには、クラスの人数や点数の散らばりの程度なども考慮しないといけない。

二つ以上のデータの間の差が偶然によるものか、それとも意味のある差なのかを判断するためには**統計的仮説検定** (test, statistical test, hypothesis test) と呼ばれる方法が使われる。統計的仮説検定では、仮説を表現する方法として

帰無仮説 (null hypothesis) 記号 H_0 と

対立仮説 (alternative hypothesis) 記号 H_1 を

対置する方法をとる。帰無仮説をたてるということは、「差がある」ことを確認するために、「差がない」という前提(仮説)を取り敢えずたててみることであり、この仮説は「無に帰したい仮説」である。こうしてたてた仮説を**採択**する(正しいとみなす)か**棄却**する(正しくないとみなす)かを判断するために、仮説が“めったに起こらないこと”であるとみなす規準となる確率 α を定める。そして、確率 α より小さい確率で起きることを“めったに起こらない”とみなすのである。 α は**有意水準**と呼ばれ、通常 α として5%とか1%とする。

例 1. 上の例をもう少し具体的にみてる。例年の試験の平均点は50点で、標準偏差は18.0点であるとする。今年のクラス36名の平均点は55点だったとする。このデータのもとに、今年の学生が従来よりできるよい学生の集まりなのかを、有意水準5%で検定してみる。このとき

帰無仮説 $H_0 : \mu = 50$,

対立仮説 $H_1 : \mu > 50$.

とする。対立仮説をこのように $\mu > 50$ とか $\mu < 50$ とおくのを**片側検定**といい、単に H_0 の否定 $\mu \neq 50$ とするのを**両側検定**という。

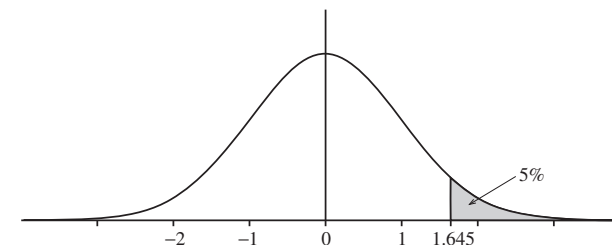
H_0 とは、今年の学生も従来と変わらないと仮定することだから、もしそうだとして試験を行えば、36人の試験の平均点 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従うはずである。このとき

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。平均点は55点だったということは $\bar{X} = 55$ であったということだから、上のデータをあてはめると

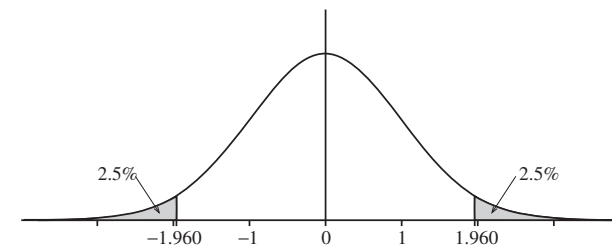
$$Z = \frac{55 - 50}{\frac{18.0}{\sqrt{36}}} = \frac{5}{3} = 1.667$$

となる。ここで次のページのグラフを見ると1.667は影を付けた部分に入っている。



これは、帰無仮説を前提として算出された確率が規準より低い水準(5%以下)である、すなわち“平均点が55点である”ということは、偶然では“めったに起きない”という意味である。したがって、帰無仮説 H_0 は棄却すべきということになる。これにより、対立仮説 H_1 を採択し「今年の学生は従来より出来がよい」と言えることになる。

なお、両側検定の場合には、上の図の代わりに下の図を使う。



例 2. 硬貨を4回投げたら4回とも表が出たとき、この硬貨は表が出やすいといえるか。また5回投げて5回とも表が出た場合はどうか。そこで

H_0 : 表の出る確率 = $1/2$ H_1 : 表の出る確率 $\neq 1/2$

とし、 H_0 を仮定する。すると、硬貨を4回投げて4回表が出る確率は $(1/2)^4 = 6.25\%$ となる。有意水準5%で考えれば、これは H_0 の棄却域に入らないので、何ともいえないことになる。5回とも表の場合は確率3.125%となり、 H_0 は棄却され、この硬貨は表が出やすいといって差し支えなくなる。

1 排気量 1800cc として販売されている自動車 20 台について実際の排気量を調べたところ、平均 1811cc であった。排気量の標準偏差が 15.0cc であるとわかっているとして、この標本平均が公称の 1800cc からずれているかどうか、有意水準 5% で検定せよ。

帰無仮説 $H_0 : \mu = 1800$ 、対立仮説 $H_1 : \mu \neq 1800$ として、両側検定を行う。

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおき、 $\bar{X} = 1811$ のときの Z の値を計算する。すると、

$$Z = \frac{1811 - 1800}{\frac{15.0}{\sqrt{20}}} \approx 3.28 > 1.96$$

となる。したがって H_0 は棄却され、排気量は公称の 1800cc からずれているといえる。

2 ある会社で製造されている電球の寿命の標準偏差は 200 時間である。この会社では、「当社の電球の寿命は平均 1500 時間である」といっている。この会社の電球を無作為に 100 個選んで寿命を測定したところ、標本の平均寿命は 1470 時間であった。この会社の主張は正しいと判断してよいか。有意水準 5% で検定せよ。

帰無仮説 $H_0 : \mu = 1500$ 、対立仮説 $H_1 : \mu \neq 1500$ として、両側検定を行う。

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおき、 $\bar{X} = 1470$ のときの Z の値を計算する。すると、

$$Z = \frac{1470 - 1500}{\frac{200}{\sqrt{100}}} = -1.5 > -1.96$$

となる。したがって H_0 は棄却できず、この会社の主張は正しいと判断してよい。

3 ある大学では、学生の親の世帯の平均年収が 1000 万円を超えているといわれている。これが本当かどうかを確かめるため、その大学の学生 100 人を無作為に選び、親の収入を調べたところ、年収の平均は 1015 万円、標準偏差は 80 万円だった。このことから、大学の学生の親の平均年収が 1000 万円を超えているといえるかを、有意水準 5% で検定せよ。

帰無仮説 $H_0 : \mu = 1000$ 、対立仮説 $H_1 : \mu > 1000$ として、片側検定を行う。

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とおき、 $\bar{X} = 1015$ のときの Z の値を計算する。すると、

$$Z = \frac{1015 - 1000}{\frac{80}{\sqrt{100}}} = 1.875 > 1.645$$

となる。したがって H_0 は棄却され、この大学の学生の親の平均年収は 1000 万円を超えているといえる。

4 某国の大統領選挙では、最近まである候補の支持率は 40% でほぼ一定の支持率を保っていたが、その候補の支持率が下がったのではないかという憶測が出ている。次回の調査で 600 人にその候補を支持するかを尋ねたとき、「支持する」が何人以下になったら、実際にその候補の支持率が下がったと結論づけられるか。有意水準は 5% とする。

帰無仮説 $H_0 : p = 0.4$ 、対立仮説 $H_1 : p < 0.4$ として、片側検定を行う。

$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ とおき、 $p = 0.4, n = 600$ のとき $Z < -1.645$ となる $\hat{p}$ の範囲を求める。すると、

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.4}{\sqrt{\frac{0.24}{600}}} < -1.645 \Leftrightarrow \hat{p} < 0.4 - 1.645 \times 0.02 = 0.3671$$

となる。 $0.3671 \times 600 = 220.26$ なので、「支持する」と答える人が 220 人以下になれば、 H_0 は棄却され、その候補の支持率が下がったと結論づけられる。