入学年度		学部	学科		組		番号		検	フリガナ	
		B		1						氏名	

5 ❦ 二項分布の正規分布による近似

1 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとき，X のとる値を

$$\mu - 1.5\sigma, \qquad \mu - 0.5\sigma, \qquad \mu + 0.5\sigma, \qquad \mu + 1.5\sigma$$

で 5 つの階級に分けるとき，X の値がそれぞれの階級に属する確率は約何 % か．

正規分布に従う $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ を，$-1.5, -0.5, 0.5, 1.5$ によって 5 つの階級に分けたときの確率を求めればよい．

$P(Z < -1.5) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.5) = 0.5 - 0.43319 = 0.0681$

$P(-1.5 < Z < -0.5) = P(0 \leqq Z < 1.5) - P(0 \leqq Z < 0.5) = 0.43319 - 0.19146 = 0.24173$

$P(-0.5 < Z < 0.5) = 2P(0 \leqq Z < 0.5) = 2 \times 0.19146 = 0.38292$

$P(0.5 < Z < 1.5) = P(-1.5 < Z < -0.5) = 0.24173$

$P(Z > 1.5) = P(Z < -1.5) = 0.0681$

（2000 年ごろまで日本の多くの学校で行われていた 5 段階の相対評価では，5, 4, 3, 2, 1 の割合はそれぞれ，7%, 24%, 38%, 24%, 7% を目安とするとされていた．）

2 ある高校の 2 年男子の身長の分布は平均 168 cm，標準偏差 6 cm の正規分布に近いという．次のような身長の生徒は何 % か．

a) 172cm 以上

身長の分布を X とすると，$Z = \frac{X-168}{6} \sim N(0, 1^2)$.

$P(X \geqq 172) = P(Z \geqq \frac{172-168}{6}) = P(Z \geqq 0.67) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 0.67)$

$= 0.5 - 0.24857 = .25143 \fallingdotseq 25.1\,\%$

b) 160 cm 以下

$P(X \leqq 172) = P(Z \leqq \frac{160-168}{6}) = P(Z \leqq -1.33) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 0.1.33)$

$= 0.5 - 0.40824 = 0.09176 \fallingdotseq 9.2\,\%$

c) 165 cm 以上 175 cm 以下

$P(165 \leqq X \leqq 175) = P(\frac{165-168}{6} \leqq Z \leqq \frac{175-168}{6}) = P(-0.5 \leqq Z \leqq 1.17)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 0.5) + P(0 \leqq Z \leqq 0.1.17)$

$= 0.19146 + 0.37900 = 0.57046 \fallingdotseq 57.0\,\%$

3 ある野球チームが 1 試合に勝つ確率は 60% であるという．このチームが 1 年間 143 試合をするとき，そのチームの勝数を X とする．ただし，引き分けはないものとする．

a) X は二項分布 $B(n, p)$ に従う．n と p の値を求めよ．

$n = 143,\ p = 0.6$

b) X は近似的に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう．μ と σ を求めよ．

$X \sim B(143, 0.6)$ より，

$\mu = E(X) = 143 \times 0.6 = 85.8,$

$V(X) = 143 \times 0.6 \times (1 - 0.6) = 34.32,$

$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{34.32} \fallingdotseq 5.86$

c) このチームが 89 勝以上する確率を求めよ．

X は近似的に $N(85.8, 5.86^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{X - 85.8}{5.86}$ は標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従う．

従って，$P(X \geqq 89) = P\left(Z \geqq \frac{89-85.8}{5.86}\right) \fallingdotseq P(Z \geqq 0.55)$

$= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 0.55) = 0.5 - 0.20884 = 0.29116 \fallingdotseq 29.1\,\%$

4 さいころを 600 回投げるとき，1 の目が出る回数が 90 回以上 110 回以下となる確率を求めよ．

さいころを 600 回投げるときの 1 の目が出る回数 X は $B(600, \frac{1}{6})$ に従う．

$B(600, \frac{1}{6})$ は $N\left(100, \sqrt{\frac{500}{6}}\right)$ で近似できるので，

$Z = \frac{X-100}{\sqrt{\frac{500}{6}}} = \frac{X-100}{9.129}$ は標準正規分布で近似できる．

$P(90 \leqq X \leqq 110) \fallingdotseq P\left(\frac{90-100}{9.129} \leqq Z \leqq \frac{110-100}{9.129}\right)$

$= P(-1.10 \leqq Z \leqq 1.10) = 2P(0 \leqq Z \leqq 1.10)$

$= 2 \times 0.36433 = 0.72866 \fallingdotseq 72.9\,\%$

$\boxed{5}$ あるアンケートの回収率は 60% であることがわかっている．このアンケートを 400 枚発送したとき，そのうちの 260 枚以上が回収される確率を求めよ．

回収される枚数を X とすると，X は $B(400, 0.6)$ に従う．
$B(400, 0.6)$ は $N\left(240, \sqrt{400 \times 0.6 \times (1-0.6)}\right) = N(240, \sqrt{96}) = N(240, 9.78)$ で近似できるので，
$Z = \frac{X-240}{\sqrt{9.78}} = \frac{X-240}{9.78}$ は標準正規分布で近似できる．

$$P(X \geqq 260) \fallingdotseq P\left(Z \geqq \frac{260-240}{9.78}\right)$$
$$= P(\geqq 2.04) = 0.5 - P(Z \leqq 2.04)$$
$$= 0.5 - 0.47932 = 0.02068 \fallingdotseq 2.1\,\%$$

$\boxed{6}$ あるテストの受験者 9500 人の成績の分布は平均点 180 点，標準偏差 35 点の正規分布に近いという．

a) 受験者の成績を表す確率変数を X とするとき，$P(X \geqq 250)$ と $P(X \leqq 215)$ をそれぞれ求めよ．

$Z = \dfrac{X-180}{35} \sim N(0, 1^2)$ だから，

$$P(X \geqq 250) = P\left(Z \geqq \frac{250-180}{35}\right) = P(Z \geqq 2.0) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2.0)$$
$$= 0.5 - 0.47725 = 0.02275 \fallingdotseq 2.3\,\%$$
$$P(X \leqq 215) = P\left(Z \leqq \frac{215-180}{35}\right) = P(Z \leqq -1.0) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.0)$$
$$= 0.5 + 0.34134 = 0.84134 \fallingdotseq 84.1\,\%$$

b) 250 点以上の者，215 点以下の者はそれぞれ何人いるか．

250 点以上の者：$9500 \times 0.02275 = 216.125 \fallingdotseq 216$ 人
250 点以上の者：$9500 \times 0.84134 = 7992.35 \fallingdotseq 7993$ 人

$\boxed{7}$ 確率変数 X の確率分布が

$$P(X = k) = 0.1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 10)$$

であるとする．

a) X の平均 μ と標準偏差 σ を求めよ．

$$\mu = E(X) = \sum_{k=1}^{10} k \times 0.1 = 5.5$$
$$V(X) = \sum_{k=1}^{10} k^2 \times 0.1 - 5.5^2 = 0.1 \times \frac{10(10+1)(20+1)}{6} - 5.5^2 = 8.25$$
$$\sigma = \sqrt{8.25} \fallingdotseq 2.87$$

b) 次の確率を求めよ．

i) $P(|X-\mu| < \sigma)$

$|X-\mu| < \sigma \Leftrightarrow \mu - \sigma < X < \mu + \sigma \Leftrightarrow 2.63 < X < 8.37$ だから，
$P(|X-\mu| < \sigma) = P(X = 3, 4, 5, 6, 7, 8) = 6 \times 0.1 = 0.6$

ii) $P(|X-\mu| > 1.5\sigma)$

$|X-\mu| > 1.5\sigma \Leftrightarrow X < \mu - 1.5\sigma$ または $X > \mu + 1.5\sigma$
$\Leftrightarrow X < 1.195$ または $X > 9.805$ だから，
$P(|X-\mu| > 1.5\sigma) = P(X = 1) = 0.1$