

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1					氏名

1)  $\lambda$  を正の数とするとき,  $\lambda$  をパラメータとする指数分布  $X$  とは, 確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

で与えられる分布である. ここで  $c$  はある正定数である.

以下では指数関数に関する積分について次が成り立つことを用いてよい.

$$\int_a^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}, \quad \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^3}$$

a)  $f(x)$  が確率密度になるように  $c$  の値を定め, 平均  $\mu = E(X)$ , 標準偏差  $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$  をそれぞれ求めよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ が成り立たないといけないが, } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} ce^{-\lambda x} dx = \frac{ce^0}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} \text{ だから, } c = \lambda \text{ でなければならぬ.}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - E(X)^2 = \frac{2\lambda}{\lambda^3} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\lambda}$$

b)  $f(x)$  が確率密度となるように  $c$  が定められているとき,  $P(X > a)$  を求めよ.

$$P(X > a) = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda e^{-\lambda a}}{\lambda} = e^{-\lambda a}$$

c) 「指数分布の無記憶性」と呼ばれる次の性質を証明せよ.

$$P(X > a + b \mid X > b) = P(X > a)$$

[事象  $B$  が起きたという仮定のもとで事象  $A$  が起きる (条件付き) 確率] は日本の高校数学では  $P_B(A)$  と表されるが, それ以外では通常  $P(A|B)$  と表される. したがって,  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  である.]  
 $\{X > a + b\} \cap \{X > b\} = \{X > a + b\}$  だから,

$$P(X > a + b \mid X > b) = \frac{P(X > a + b)}{P(X > b)}$$

一方, b) より,  $P(X > a + b) = e^{-(a+b)\lambda}$ ,  $P(X > b) = e^{-b\lambda}$ ,  $P(X > a) = e^{-a\lambda}$  だから,

$$P(X > a + b \mid X > b) = \frac{e^{-(a+b)\lambda}}{e^{-b\lambda}} = e^{-a\lambda} = P(X > a)$$

2 ある交差点である時間にタクシーが空車で通過する間隔  $X$  (分) は次の確率密度関数で表される指数分布に従っていると仮定する.

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) 平均到着間隔  $E(X)$  はいくらか.

問題 1 で  $\lambda = 2$  としたものだから,  $E(X) = \frac{1}{2} = 0.5$  (分)

b) 到着間隔の標準偏差  $\sigma(X)$  を求めよ.

問題 1 a) より,  $\sigma(X) = \frac{1}{2} = 0.5$  (分)

c) 今から 3 分間タクシーが捕まらない確率を求めよ.

問題 1 b) より,  $P(X > 3) = e^{-2 \times 3} = e^{-6}$

d) これまですでに 5 分間待ったがタクシーが捕まらなかった. このあとさらに 3 分待ってもタクシーが捕まらない確率を求めよ.

問題 1 c) より,  $P(X > 3 + 5 | X > 5) = P(X > 3) = e^{-6}$

3 成功する確率が  $p$  である試行を何回も繰り返すとき, 最初に成功するまでの試行回数を  $X$  とする. このような確率変数は幾何分布にしたがうというのであった. このとき,  $q = 1 - p$  とおくと,  $k$  回目に成功初めて成功する確率は  $P(X = n) = pq^{n-1}$  で表される. 幾何分布  $X$  についても次の無記憶性が成り立つことを証明せよ.

$$P(X > m + n | X > m) = P(X > n)$$

$$P(X > n) = P(X = n) + P(X = n + 1) + P(X = n + 2) + \dots$$

$$= pq^n + pq^{n+1} + pq^{n+2} + \dots$$

$$= pq^n(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{pq^n}{1-q} = \frac{pq^n}{p} = q^n$$

$$\{X > m + n\} \cap \{X > m\} = \{X > m + n\} \text{ だから,}$$

$$P(X > m + n | X > m) = \frac{P(X > m + n)}{P(X > m)} = \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n = P(X > n)$$