

① 関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0, x > 1 \end{cases}$ で定義する.

a) $f(x)$ が確率密度になるように c の値を定めよ.

$f(x)$ が確率密度になるためには $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ とならなければならない. そこで, 左辺を計算すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 cx(1-x) dx = c \int_0^1 (x-x^2) dx = c \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{c}{6}$$

となる. したがって $c = 6$ でなければならない.

b) $f(x)$ を確率密度とする確率変数 X について平均 $\mu = E(X)$ と分散 $\sigma^2 = V(X)$ を求めよ.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x) dx = 6 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 6 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x) dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \int_0^1 (x^3 - x^4) dx - \frac{1}{4} \\ &= 6 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

② 【正規分布】あるシーズンのプロ野球の1試合にかかる時間は, 平均3時間18分, 標準偏差24.0分の正規分布にしたがうという調査結果が得られた. この結果をもとにして, 試合が2時間30分以内で終わる確率をもとめよ.

1試合にかかる時間を X とおくと, この調査結果は X が正規分布 $N(198, 24.0^2)$ に従っていることを意味する. ここで, 時間の単位は分である. 求める確率は $P(X \leq 150)$ である. 今, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-198}{24.0}$ とおくと, $Z \sim N(0, 1)$ となり,

$$P(X \leq 150) = P\left(Z \leq \frac{150-198}{24.0}\right) = P(Z \leq -2.00)$$

が成り立つ. この確率を標準正規分布表から求めると次のようになる.

$$P(Z \leq -2.00) = P(Z \geq 2.00) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.00) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 (= \text{約 } 2.3\%)$$

③ 【推定】某メーカーのあるデジタルカメラを購入しようと思い, インターネットでいろいろな店の値段 X を調べてみたところ 25 店舗での平均は 3.5 万円であった. X の母標準偏差の値が 0.2 万円であるとわかっているとき, 平均価格を信頼度 95% で推定せよ.

標本平均 \bar{X} は母平均価格を μ , 母標準偏差を σ とするとき, 正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うので, $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は $N(0, 1)$ に従う. このとき, $P(|Z| < k) < 0.95$ となるような k を正規分布表よりもとめると $k = 1.96$ となる. そこで, $|Z| < 1.96$ という条件を μ について解くと,

$$\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る. これに $\bar{X} = 3.5, \sigma = 0.2, n = 25$ をあてはめると,

$$3.5 - 1.96 \frac{0.2}{5} < \mu < 3.5 + 1.96 \frac{0.2}{5} \quad \text{より} \quad 3.4216 < \mu < 3.5784$$

④ 【推定】昨年の紅白歌合戦の視聴率を調査するために無作為に 400 人を選び, アンケートをとったところ 160 人が紅白歌合戦を見たと言えた. このとき, 紅白歌合戦の視聴率を信頼度 95% で推定せよ.

考え方は前問と同様. 視聴率を p とすると, 標準偏差 σ は $\sqrt{p(1-p)}$ となる (二項分布の $n = 1$ の場合).

「標本視聴率」は $\bar{p} = \frac{160}{400} = 0.40$ である. このとき, σ は $\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})} = \sqrt{0.4 \times 0.6}$ で代用し,

$$0.4 - 1.96 \frac{\sqrt{0.24}}{\sqrt{400}} < p < 0.4 + 1.96 \frac{\sqrt{0.24}}{\sqrt{400}} \quad \text{より} \quad 0.352 < p < 0.448$$

【5】 【仮説検定】 あるシーズンのプロ野球の 1 試合にかかる時間は、平均 3 時間 18 分、標準偏差 24.0 分の正規分布にしたがうという調査結果が得られた。これでは試合時間が長すぎるという批判を受けて、プロ野球機構は試合時間短縮のためのある方策をとった。すると、シーズン最初のヶ月間に行なわれた 36 試合の平均時間は 3 時間 10 分となった。このとき、機構のとった方策の効果が本当にあったと言えるか、有意水準 5% で検定せよ。

帰無仮説 $H_0 : \mu = 198$ ，対立仮説 $H_1 : \mu < 198$ として、片側検定を行う。
 そこで、 $\mu = 198$ と仮定し、36 試合の標本平均 \bar{X} に対し、 $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}-198}{4.0}$ とおく。このとき、 $Z \sim N(0, 1)$ となるが、標準正規分布表を用いると、 $Z < -1.645$ となる確率が 5% 未満であることがわかる。いま、 $\bar{X} = 190$ とすると $Z = -2.0 < -1.645$ となるので、このような確率は 5% 未満であり、「減多に起きない」と考えられ、帰無仮説 H_0 は棄却される。これより、対立仮説 H_1 が採択され、「方策の効果があり、平均試合時間は短縮した」と結論づけられる。

【6】 【仮説検定】 全国の大学生の体格指数 BMI (Body Mass Index = (体重 kg)/(身長 m)²) の平均は 22.0 で標準偏差は 2.0 であることがわかっているとす。ある学生グループ 49 人に対して健康診断を行い BMI を調べたところ平均は 20.7 であった。この学生のグループは全国の学生と比較して痩せているといえるか、有意水準 5% で検定せよ。

帰無仮説 $H_0 : \mu = 22.0$ ，対立仮説 $H_1 : \mu < 22.0$ として、片側検定を行う。
 前問と同様にして、 $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}-22.0}{\frac{2.0}{7}}$ とおき、 $\bar{X} = 20.7$ のときの Z の値を計算すると $Z = -4.55 < -1.65$ となる。したがって H_0 は棄却され、このグループの学生は全国平均と比べて痩せているといえる。

【7】 【仮説検定】 昨年末の紅白歌合戦第 2 部の視聴率は全国平均 40% であったという調査がある。C 大学の学生 600 人にアンケートをとったところ 216 人が紅白歌合戦第 2 部を見たと答えた。この結果から、C 大生の間の紅白視聴率は全国平均より低かったといえるか、有意水準 5% で検定せよ。

検定の枠組みは前 2 問と同様であるが、問題 4 のように σ として $\sqrt{p(1-p)}$ を用いることだけが異なる。
 $Z = \frac{\bar{p}-0.4}{\frac{\sqrt{0.4(1-0.4)}}{\sqrt{600}}}$ に対し、 $\bar{p} = \frac{216}{600}$ とおいて計算すると、 $Z = -2.0$ となるので、この問題でも H_0 は棄却され、C 大生の視聴率は全国平均と比べて低かったといえる。

【8】 ある科目の学生の出席回数 X と期末試験成績 Y の調査を行ったところ次のような結果を得た。

X : 出席回数 (回)	7	8	9	9	10	12	12	13
Y : 試験成績 (点)	60	50	66	83	66	73	91	87

a) 出席回数と試験の成績の間の相関係数を求めよ。

X の仮平均を 10、 Y の仮平均を 70 とし、それぞれ $U = X - 10$ 、 $V = Y - 70$ とおく。

X	Y	U	V	U^2	V^2	UV
7	60	−3	−10	9	100	30
8	50	−2	−20	4	400	40
9	66	−1	−4	1	16	4
9	83	−1	13	1	169	−13
10	66	0	−4	0	16	0
12	73	2	3	4	9	6
12	91	2	21	4	441	42
13	87	3	17	9	289	51
和		0	16	32	1440	160
平均		0	2	4	180	20

$$\text{Cov}(X, Y) = E(UV) - E(U)E(V) = 20.0$$

$$V(X) = E(U^2) - E(U)^2 = 4.0$$

$$V(Y) = E(V^2) - E(V)^2 = 176.0$$

$$\text{相関係数 } r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = 0.754$$

b) 回帰直線 $Y = a + bX$ を求めよ。

$$b = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = 5.0$$

$$a = E(Y) - bE(X) = 72 - 5.0 \times 10 = 22.0$$

$$\therefore Y = 22.0 + 5.0X$$

c) 80 点以上を A 評価とするとき、A をとりたければ何回以上出席するべきか。

$$Y \geq 80 \text{ となるための条件は、} 22.0 + 5.0X \geq 80 \text{ を解いて、} X \geq 11.60 \text{ (回)}$$