2025 年 7 月 22 日

基礎数学 B1	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
火曜 4 限 担当: 鍬田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ 実数全体の集合 U の部分集合 A，B を次のように定める．ただし，a は正の定数とする.

$A = \{x \mid x$ は 18 の正の約数 $\}$,
$B = \{x \mid |x-4| \leqq a\}$

a) A を外延的記法（要素をすべて並べて表す方法）によって表せ.

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

b) $A \cap B = \phi$ となるような a の範囲を求めよ.

$|x-4| \leqq a$ とは，4 との距離が a 以下という意味.
4 との距離が一番近い A の要素は 3．従って a が $4-3=1$ より小さくなればよい．$\therefore a < 1$ のとき.

c) $a = 2$ のとき，$A \cap B$ の部分集合をすべて挙げよ.

$a = 2$ のとき，$A \cap B = \{2, 3, 6\}$．従って，その部分集合は,
$\phi, \{2\}, \{3\}, \{6\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{2, 3, 6\}$ の計 8 つ.

$\boxed{2}$ 1 つの箱に赤球 5 個と白球 1 個がはいっている．A, B 二人が，A からはじめて交互に箱の中から無作為に球を 1 つ取り出し，先に白球をを取り出した者を勝ちとする．ただし，取り出した球は箱に戻さないものとする．箱から取り出され球の色が赤なら R, 白なら W で表すとし，A, B が赤，赤，白の順に玉を取り出すことを RRW と表すなどとする.

a) この試行の標本空間 Ω を上の記号を用いて表せ.

$\Omega = \{\mathrm{W}, \mathrm{RW}, \mathrm{RRW}, \mathrm{RRRW}, \mathrm{RRRRW}, \mathrm{RRRRRW}\}$

b) ある試行について，その標本空間の部分集合を事象と呼ぶのであった．この試行に関する事象をすべて数え上げると何通りあるか.

すべての事象の個数は Ω の部分集合の個数．$n(\Omega) = 6$ より，Ω の部分集合の個数は $2^6 = 64$ 個.

c) a) で設定した標本空間 Ω において,「A が勝つ」という事象 A を外延的記法で表せ.

$A = \{\mathrm{W}, \mathrm{RRW}, \mathrm{RRRRW}\}$

d) A が勝つ確率 $P(A)$ を求めよ.

$P(A) = P(\{\mathrm{W}\}) + P(\{\mathrm{RRW}\}) + P(\{\mathrm{RRRRW}\})$
$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

e) 「勝負がつくまでに 3 個以上球を取り出した」という事象を C とする．確率 $P(C)$ を求めよ.

$\overline{C} = \{\mathrm{W}, \mathrm{RW}\}$ より,
$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \big(P(\{\mathrm{W}\}) + P(\{\mathrm{RW}\})\big) = \frac{2}{3}$

f) 事象 A と C が独立であるかどうかを判定せよ.

$P(A \cap C) = P(\{\mathrm{RRW}\}) + P(\{\mathrm{RRRRW}\}) = \frac{1}{3}$ だから,
$P(A \cap C) = P(A)P(C)$ が成り立つ．したがって，A と C は独立.

$\boxed{3}$ ある試行における 2 つの事象 A，B について,

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

であるとする.

a) $P(B)$ をもとめよ.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ より,
$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) $P_A(B)$ を求めよ.

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$

c) 事象 A と B は独立であるかどうかを判定せよ.

$P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$ より，A と B は独立.

$\boxed{4}$ 1 から 8 までの数がそれぞれ書かれている 8 枚のカードから，カードを同時に 2 枚取りだし，書かれている数の大きい方から小さい方を引いた差を X とする.

a) X の確率分布を求めよ.

X	1	2	3	4	5	6	7	計
P	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	1

b) X の期待値と分散を求めよ.

$E(X) = 1 \times \frac{7}{28} + 2 \times \frac{6}{28} + 3 \times \frac{5}{28} + 4 \times \frac{4}{28} + 5 \times \frac{3}{28} + 6 \times \frac{2}{28} + 7 \times \frac{1}{28}$
$= \frac{1}{28}(7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7) = \frac{84}{28} = 3$

$E(X) = 1^2 \times \frac{7}{28} + 2^2 \times \frac{6}{28} + 3^2 \times \frac{5}{28} + 4^2 \times \frac{4}{28} + 5^2 \times \frac{3}{28}$
$+ 6^2 \times \frac{2}{28} + 7^2 \times \frac{1}{28}$
$= \frac{1}{28}(7 + 24 + 45 + 64 + 75 + 72 + 49) = \frac{336}{28} = 12$

$V(X) = 12 - 3^2 = 3$

c) 確率変数 Y を $Y = aX + b$ で定める．ただし，a，b は定数で，$a > 0$ とする．Y の期待値が 0，分散が 1 となるような a，b の値を求めよ.

$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = 0$,
$V(Y) = V(aX + b) = a^2 V(X) = 1$ より,
$3a + b = 0$，$3a^2 = 1$ を解いて,
$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$b = -\sqrt{3}$

5 ある調査によれば，無作為に選んだメールの 35% が迷惑メール，残り 65% が一般のメールであるという．また，この調査によると，迷惑メールに URL が含まれている確率は 60% で，一般のメールが URL を含んでいる確率は 15% であるという．
メールを受け取ったとき，それが迷惑メールであるという事象を A，そのメールが URL を含むという事象を B として，以下の問いに答えよ．

a) 問題文から直接 $P(A)$，$P_A(B)$，$P_{\overline{A}}(B)$ を求めよ．

$P(A) = 0.35$
$P_A(B) = 0.6$
$P_{\overline{A}}(B) = 0.15$

b) $P(A \cap B)$，$P(\overline{A} \cap B)$ を求めよ．

$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = 0.35 \times 0.6 = 0.21$
$P(A \cap B) = P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = 0.65 \times 0.15 = 0.0975$

c) メールの種類と，URL を含むか否かの割合を表す下の一覧表を完成させよ．

URL ＼ メール	含む B	含まない $\overline{B}$	計
迷惑 A	21%	14 %	35 %
一般 $\overline{A}$	9.75 %	55.25 %	65 %
計	30.75 %	69.25 %	100 %

d) 無作為に選んだメールが URL を含んでいたとき、それが迷惑メールである確率を求めよ．

求める確率は，$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ であるが，
c) により，$P(B) = 0.3075$ なので，
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.21}{0.3075} \fallingdotseq 0.683$
言い換えると約 68%.

6 X は，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ という値をとる確率が，それぞれ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ であるような確率変数であるとする．このとき，期待値 $E(X)$ は $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$ で定義されるのであった．いま，a, b を定数とするとき，確率変数 Y を $Y = (aX + b)^2$ と定義する．Y は下のような確率分布をもつ確率変数である．

Y	$(ax_1 + b)^2$	$\cdots$	$(ax_k + b)^2$	$\cdots$	$(ax_n + b)^2$	計
P	p_1	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

Y の期待値 $E(Y)$ を $E(X), E(X^2), a, b$ を用いて表せ．

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} (a^2 x_k^2 + 2abx_k + b^2) p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a^2 x_k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n} 2abx_k p_k + \sum_{k=1}^{n} b^2 p_k \\
&= a^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k + 2ab \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + b^2 \sum_{k=1}^{n} p_k \\
&= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2
\end{aligned}
$$

7 赤球 5 個と白球 3 個が入っている袋から，3 個の球を同時に取り出して，色を確認してからもとに戻す．この操作を 70 回行うとき，赤球 2 個，白球 1 個が出る回数を X とする．X の平均と分散を求めよ．

3 個の球を同時に取り出したとき，赤球 2 個，白球 1 個が出る確率は
$\dfrac{{}_5C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_8C_3} = \dfrac{10 \times 3}{56} = \dfrac{15}{28}$
したがって，X は二項分布 $B\left(70, \frac{15}{28}\right)$ にしたがう．よって，
$E(X) = 70 \times \dfrac{15}{28} = \dfrac{75}{2}$
$V(X) = 70 \times \dfrac{15}{28} \times \dfrac{13}{28} = \dfrac{975}{56}$

8 あるバスケットボール選手が 3 ポイントシュートを成功させる確率は 40% であるという．この選手が 1 シーズン 600 回 3 ポイントシュートを試みたとして成功する回数を X とする．X の期待値と分散を求めよ．また，標準偏差は 8 より大きいか小さいかを答えよ．

$X \sim B(600, 0.4)$ だから，
$E(X) = 600 \times 0.4 = 240$
$V(X) = 600 \times 0.4 \times (1 - 0.4) = 144$
また，$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{144} = 12$ なので，標準偏差は 8 より大きい．

9 原点 O から出発して，数直線上を動く点 P がある．コインを 3 枚投げ，すべて表が出たならば P は $+3$ だけ移動し，そうでなければ -1 だけ移動する．この 3 枚のコイン投げを 15 回繰り返すとき，3 枚とも表が出た回数を X とし，そのときの P の座標を Y とする．以下の問いに答えよ．

a) X は二項分布に従う．その分布を $B(n, p)$ の形で表せ．

$X \sim B\left(15, \frac{1}{8}\right)$

b) X の期待値と分散を求めよ．

$E(X) = 15 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{15}{8}$

$V(X) = 15 \times \dfrac{1}{8} \times \dfrac{7}{8} = \dfrac{105}{64}$

c) Y を X の式で表せ．

$Y = 3 \times X + (-1) \times (15 - X) = 4X - 15$

d) Y の期待値と分散をそれぞれ求めよ．

$E(Y) = E(4X - 15) = 4E(X) - 15 = \dfrac{15}{2}$

$V(Y) = V(4X - 15) = 4^2 V(X) = \dfrac{105}{4}$