

- [1] a)  $A \cap \bar{B} = \{n \mid n \text{ は } 6 \text{ の倍数ではない } 2 \text{ の倍数}\}$  だから,  $n(A \cap B) = 50 - 16 = 34$ .  
 b)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  だから,  $n((A \cup B) \cap C) = n((A \cap C) \cup (B \cap C))$   
 $= n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 10 + 6 - 3 = 13$ .

- [2]  $B = \{x \mid 1 - a \leq x \leq 1 + a\}$  であることに注意する.  
 a)  $0 < a < 2$   
 b)  $3 \leq 1 + a < 4$  より,  $2 \leq a < 3$   
 c)  $A \subset B$  となるような  $a$  の範囲を求めればよい. そのような  $a$  の範囲は  $5 \leq 1 + a$  より,  $a \geq 4$ .

- [3] a) 36 個 ( $\Omega = \{(a, b) \mid a, b \text{ は } 1 \text{ から } 6 \text{ までの自然数}\}$  だから,  $n(U) = 36$ )  
 b) 事象の個数  $= \Omega$  の部分集合の個数だから,  $2^{36}$  個  
 c)  $A = \{(4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$   
 d)  $\bar{B}$  は「出た目の数がともに偶数である」であり,  $n(\bar{B}) = 3 \times 3 = 9$ . したがって,  
 $n(B) = n(U) - n(\bar{B}) = 27$ .  
 e)  $A \cap B = \{(4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)\}$  より,  $n(A \cap B) = 5$ .  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{5}{8}$ .  
 また,  $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ ,  $P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$  なので,  $P(A \cap B) = \frac{5}{36} \neq P(A)P(B) = \frac{6}{36}$  だから,  $A$  と  $B$  は独立ではない.

- [4] a)  $P(C) = 0.01$ ,  $P_C(Y) = 0.7$ ,  $P_{\bar{C}}(\bar{Y}) = 0.999$ .  
 b)  $P(C \cap Y) = P(C) \times P_C(Y) = 0.007$ ,  $P(\bar{C} \cap \bar{Y}) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(\bar{Y}) = 0.98901$

| 検査 \ ウィルス        | ウィルス   |                   | 計        |
|------------------|--------|-------------------|----------|
|                  | 感染 (C) | 非感染 ( $\bar{C}$ ) |          |
| 陽性 (Y)           | 0.7 %  | 0.099 %           | 0.799 %  |
| 陰性 ( $\bar{Y}$ ) | 0.3 %  | 98.901 %          | 99.201 % |
| 計                | 1 %    | 99 %              | 100 %    |

- b) 求める確率は  $P_{\bar{Y}}(C)$ .  $P_{\bar{Y}}(C) = \frac{P(C \cap \bar{Y})}{P(\bar{Y})} = \frac{0.7}{0.799} = 0.876$ .  
 [5] a)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  より  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{5} + b - \frac{3}{5} = b - \frac{2}{5}$ .  
 b)  $A$  と  $B$  が独立であるためには  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  が成り立つことが必要十分. a) の答えを用いると,  $2 - b = \frac{1}{5} \times b$  が必要十分条件. これを解いて,  $b = \frac{1}{5}$ .  
 [6]  $A$ : 「どちらかが偶数」,  $B$ : 「両方の目が偶数」とすると, 求める確率は  $P_A(B)$ .  $P(A) = \frac{3}{4}$ ,  $P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{4}$  だから,  $P_A(B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$ .

- [7]  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B) = \frac{3}{13}$ ,  $P(C) = \frac{1}{26}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{3}{52} = P(A)P(B)$ ,  $P(A \cap C) = \frac{1}{52} \neq P(A)P(C)$ ,  $P(B \cap C) = \frac{1}{26} \neq P(B)P(C)$ . したがって,  $A$  と  $B$  は独立,  $A$  と  $C$ ,  $B$  と  $C$  は独立ではない.  
 ジョーキーを 1 枚含む場合,  $P(A) = \frac{13}{53}$ ,  $P(B) = \frac{12}{53}$ ,  $P(C) = \frac{2}{53}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{3}{53} \neq P(A)P(B)$ ,  $P(A \cap C) = \frac{1}{53} \neq P(A)P(C)$ ,  $P(B \cap C) = \frac{2}{53} \neq P(B)P(C)$  なので, どの 2 つも独立ではない..

- [8] a) 帽子を忘れずに家に帰ってくる確率は  $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$ . 求める確率はその余事象の確率なので,  
 $1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$ . b)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ . c)  $\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}} = \frac{20}{61}$ . d) 同様にして,  $A$  で忘れて帰る確率は  
 $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{61}{125}} = \frac{25}{61}$ ,  $C$  で忘れて帰る確率は  $\frac{\frac{16}{125}}{\frac{61}{125}} = \frac{16}{61}$ . したがって,  $A$  の家に忘れて帰る確率が一番高い.  
 [9] a)  $X \sim B(4, \frac{1}{2})$  だから,  $E(X) = 2$ ,  $V(X) = 1$ .  
 b)  $E(X) = \frac{35}{18} \approx 1.94$ ,  $V(X) = \frac{655}{324} \approx 2.05$

- c) 

|     |                |                 |                 |                |   |
|-----|----------------|-----------------|-----------------|----------------|---|
| $X$ | 0              | 1               | 2               | 3              | 計 |
| $P$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{4}{35}$ | 1 |

 より  $E(X) = \frac{12}{7}$ ,  $V(X) = \frac{24}{49}$ .

- [10] 表の出た硬貨の金額の和を  $X$  とする. 確率分布は 

|     |               |               |               |               |   |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---|
| $X$ | 0             | 50            | 100           | 150           | 計 |
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

 だから,  
 $E(X) = 75$  (円),  $\sigma(X) = 25\sqrt{5} \approx 55.9$  (円)

- [11]  $E(Y) = aE(X) + b$ ,  $V(Y) = a^2V(X)$  が成り立つので,  $\begin{cases} 0 = 5a + b \\ 1 = 100a^2 \end{cases}$  を解いて,  $a = \frac{1}{10}$ ,  
 $b = -\frac{1}{2}$ .

- [12]  $V(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X) + E(Y))^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2)$   
 $= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2)$   
 $= (E(X^2) - E(X)^2) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)) + (E(Y^2) - E(Y)^2) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$

- [13] さいころの出る目の数を  $Y$ , 表の出た硬貨の枚数を  $Z$  とすると,  $X = YZ$ .  $Y$  と  $Z$  は明らかに独立であるから,  $E(X) = E(YZ) = E(Y)E(Z)$ . そして,  $E(Y) = \frac{7}{2}$ ,  $E(Z) = 1$  だから  $E(X) = \frac{7}{2}$ .

- [14] a)  ${}_8C_0\left(\frac{3}{4}\right)^8 + {}_8C_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^7 + {}_8C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^8 + 8 \cdot 3^7 + 28 \cdot 3^6}{4^8} = \frac{3^6 \cdot 61}{4^8} = \frac{44469}{65536} \approx 0.679$ .  
 b) でたらしめに答えたときの  $X$  の期待値  $E(X)$  は  $E(X) = np = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$ .  $(X, Y) = (2, 0), (8, 100)$  を通る直線の式を求めると,  $Y = \frac{100}{6}(X - 2) \approx 16.7X - 33.3$

- [15] a)  $X \sim B(1000, 0.05)$   
 b)  $E(X) = 1000 \times 0.05 = 50$ ,  $V(X) = 1000 \times 0.05 \times (1 - 0.05) = 47.5$ .

- [16] a)  $X$  の確率分布は 

|     |                |               |               |                |   |
|-----|----------------|---------------|---------------|----------------|---|
| $X$ | 0              | 1             | 2             | 3              | 計 |
| $P$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{14}$ | 1 |

 $E(X) = \frac{3}{2}$ ,  $V(X) = \frac{15}{28}$ .

- b)  $Y \sim B(4, \frac{3}{8})$  だから,  $E(Y) = \frac{3}{2}$ ,  $V(Y) = 4 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$ .

- [17] a)  $X \sim B(6, \frac{1}{3})$ ,  $E(X) = 2$ ,  $V(X) = \frac{4}{3}$ ,  $\sigma(X) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .  
 b) 3 の倍数の目が出なかった回数は  $6 - X$  だから,  $Y = (+2)X + (-1)(6 - X) = 3X - 6$   
 c)  $E(Y) = E(3X - 6) = 3E(X) - 6 = 2 \times 3 - 6 = 0$ ,  $V(Y) = V(3X - 6) = 3^2V(X) = 12$ ,  
 $\sigma(X) = 2\sqrt{3}$ .