

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1					氏名

● 積の微分公式

2つの微分可能な関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = uv$ の導関数を求めたい。
 x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表す。

いま、 x を $x + \Delta x$ に変化させたとき、 Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える。

x が $x + \Delta x$ に変化したとき

$$u \rightarrow u + \Delta u, \quad v \rightarrow v + \Delta v$$

と変化するので、

$$y = uv \rightarrow (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

と変化する。したがって、 y の増分は

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

と表せる。これを展開して整理すると、

$$\Delta y = \Delta u \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \Delta v + \boxed{\Delta u \Delta v}$$

と表される。この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{\Delta u}{\Delta x}} \cdot v + u \cdot \boxed{\frac{\Delta v}{\Delta x}} + \boxed{\frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}}$$

ここで $\Delta x \rightarrow 0$ として $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい。まず、導関数の定義より、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

である。また、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta v \rightarrow 0$ となるので、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0.$$

が成り立つ。したがって、

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{du}{dx}} \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \boxed{\frac{dv}{dx}}$$

この式を別の記号法 $\frac{dy}{dx} = (f(x)g(x))'$, $\frac{du}{dx} = f'(x)$, $\frac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと、次の積の微分公式が得られる。

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

● 商の微分公式

次に、2つの微分可能な関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の商として表される関数 $y = \frac{u}{v}$ の導関数を求めたい。前と同様に、 x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表し、 x を $x + \Delta x$ に変化させたとき、 Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える。

前の場合と同様に、 x が $x + \Delta x$ に変化したとき、 $u \rightarrow u + \Delta u$, $v \rightarrow v + \Delta v$ と変化するので、

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

と変化する。したがって、 y の増分は

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

と表せる。これを通分し、整理すると、

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot \boxed{v} - \boxed{u} \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

と表される。この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\boxed{\Delta u} \cdot v - u \cdot \boxed{\Delta v}}{\Delta x (v + \Delta v)v}$$

と表される。この式で $\Delta x \rightarrow 0$ として $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい。まず、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

であり、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta v \rightarrow 0$ となるので、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)v = v^2$ が成り立つ。したがって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{\frac{du}{dx}} \cdot \boxed{v} - \boxed{u} \cdot \boxed{\frac{dv}{dx}}}{v^2}$$

この式を別の記号法 $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)', \frac{du}{dx} = f'(x), \frac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと、次の商の微分公式が得られる。

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

1 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$$f'(x) = 3x^2$$

b) $f(x) = \frac{1}{3x - 2}$

$$f'(x) = \frac{-3}{(3x - 2)^2}$$

c) $f(x) = \frac{1}{6x^3}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^4}$$

d) $f(x) = \frac{x - 5}{x^2 + 5}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 10x + 5}{(x^2 + 5)^2}$$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

2 a) $f(x)g(x)h(x) = (f(x)g(x))h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $(f(x)g(x)h(x))'$ を求めよ.

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= ((f(x)g(x))h(x))' = (f(x)g(x))'h(x) + (f(x)g(x))h'(x) \\ &= (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

b) 2 つの微分可能な関数 $f(x), g(x)$ について導関数 $(f(x)^2g(x))'$ を求めよ.

$$\begin{aligned}(f(x)^2g(x))' &= (f(x)^2)'g(x) + f(x)^2g'(x) \\ &= (f'(x)f(x) + f(x)f'(x))g(x) + f(x)^2g'(x) \\ &= 2f(x)f'(x)g(x) + f(x)^2g'(x)\end{aligned}$$

c) 底面の半径が r で、高さが h の直円錐がある。 r, h が時間 t とともに変化するとき、この直円錐の体積 V の t に関する導関数 $\frac{dV}{dt}$ を $r, h, \frac{dr}{dt}, \frac{dh}{dt}$ を用いて表せ。[ヒント：b) の結果を用いるとよい。]

体積 V は $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ と表せる。前問の b) を用いて、ここで、 r, h, V はそれぞれ時間 t の関数であるから、これらを $r(t), h(t), V(t)$ と書くと、

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \frac{d}{dt}(r^2 h) = \frac{\pi}{3} \left(2rh \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{dh}{dt} \right)$$