2026 年 1 月 23 日

基礎数学 A2	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

- 筆記用具以外の持ち込みは不可.
- 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に加えること．これがない場合，大幅な減点をすることもある.

$\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{-x+3}{2x-1}$ とする.

a) $f(x)$ の定義域を述べよ.

分母 $\neq 0$ より，$x \neq \frac{1}{2}$.（正確には $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}\}$）

b) $f(x)$ を $a + \dfrac{b}{2x-1}$ の形に表せ.

$-x+3$ を $2x-1$ で割ると，商は $-\frac{1}{2}$，余りは $\frac{5}{2}$ だから，

$\dfrac{-x+3}{2x-1} = -\frac{1}{2} + \dfrac{\frac{5}{2}}{2x-1}$

c) x が -2 から $-2+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率を求め，なるべく簡単な形で表せ.

$f(-2+h) = \dfrac{-(-2+h)+3}{2(-2+h)-1} = \dfrac{-h+5}{2h-5}$,

$f(-2) = \dfrac{-(-2)+3}{2(-2)-1} = -1$ より，

$\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \dfrac{\frac{-h+5}{2h-5}-(-1)}{h} = \dfrac{-h+5+(2h-5)}{h(2h-5)}$

$= \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}(2h-5)} = \dfrac{1}{2h-5}$

d) $f(x)$ の $x=-2$ における微分係数を極限による定義を用いて直接計算せよ.

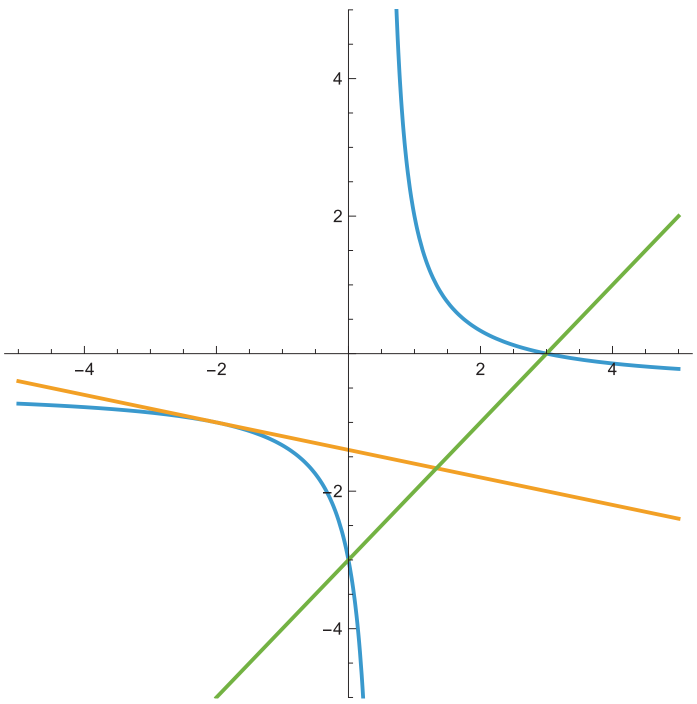
$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h-5} = \frac{1}{0-5} = -\frac{1}{5}$

e) $y = f(x)$ のグラフの $(-2, f(-2))$ における接線の方程式を求めよ.

$f(-2) = -1$，$f'(-2) = -\frac{1}{5}$ なので，接線は $(-2,-1)$ を通り，傾き $-\frac{1}{5}$ の直線.

$y+1 = -\frac{1}{5}(x+2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$

f) $y = f(x)$ のグラフ，e) で求めた接線，および直線 $y = x-3$ を下の座標平面内に描け.



g) 次の連立方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} y = \dfrac{-x+3}{2x-1} \\ y = x-3 \end{cases}$$

y を消去して，$\frac{-x+3}{2x-1} = x-3$．分母を払って，

$-x+3 = (2x-1)(x-3) \Leftrightarrow -x+3 = 2x^2-7x+3$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3$

$x=1$ のとき $y=-3$，$x=4$ のとき $y=0$.

(答) $(x, y) = (0, -3), (3, 0)$

h) グラフを利用して不等式 $\dfrac{-x+3}{2x-1} \leqq x-3$ を解け.

$y = \dfrac{-x+3}{2x-1}$ のグラフが直線 $y = x-3$ より下にある x の範囲を求めればよい．グラフより，$0 \leqq x < \frac{1}{2}$ または $x \geqq 3$.

i) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

$y = \dfrac{-x+3}{2x-1}$ を x について解く．まず，両辺に $2x-1$ をかけて，

$(2x-1)y = -x+3$．これを x について整理すると $(2y+1)x = y+3$.

この方程式は $y \neq -\frac{1}{2}$ のときのみ解を持ち，その解は $x = \dfrac{y+3}{2y+1}$.

したがって，$f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{2y+1}$．ここで，$x$ と y を入れ換えて，

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$.

j) $y = f(x)$ および，$y = f^{-1}(x)$ の定義域・値域を示せ.

$y = f(x)$
$$\begin{cases} \text{定義域：} & x \neq \frac{1}{2} \\ \text{値域：} & y \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y = f^{-1}(x)$
$$\begin{cases} \text{定義域：} & x \neq -\frac{1}{2} \\ \text{値域：} & y \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ a を正の定数とするとき，a を底とする対数関数 $f(x) = \log_a x$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．ここで，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ は既知とする.

［ヒント：底の変換公式を用いるとよい.］

底の変換公式により，$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$

$\therefore (\log x)' = \left(\dfrac{\log x}{\log a}\right)' = \dfrac{1}{\log a}(\log x)' = \dfrac{1}{x \log a}$

$\boxed{3}$ $f(x) = \sqrt{-2x+7}$ とする．以下の問いに答えよ．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を求めよ．

根号内 $\geqq 0$ より，$-2x+7 \geqq 0 \Leftrightarrow x \leqq \frac{7}{2}$

$\sqrt{}$ は正または 0 の値をとるので，値域は $y \geqq 0$

b) $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求め，その定義域と値域を述べよ．

$y = \sqrt{-2x+3}$ の両辺を 2 乗し，$y^2 = -2x+7$．これを x について解くと，
$x = -\frac{1}{2}(y^2-7)$．ここで，x と y を入れ換えて，$y = -\frac{1}{2}(x^2-7)$.
したがって，$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x^2-7)$ である．
$y = f^{-1}(x)$ の定義域は $y = f(x)$ の値域に対応して制限され，$x \geqq 0$.
また，値域は $y = f(x)$ の定義域に対応して，$y \leqq \frac{7}{2}$.

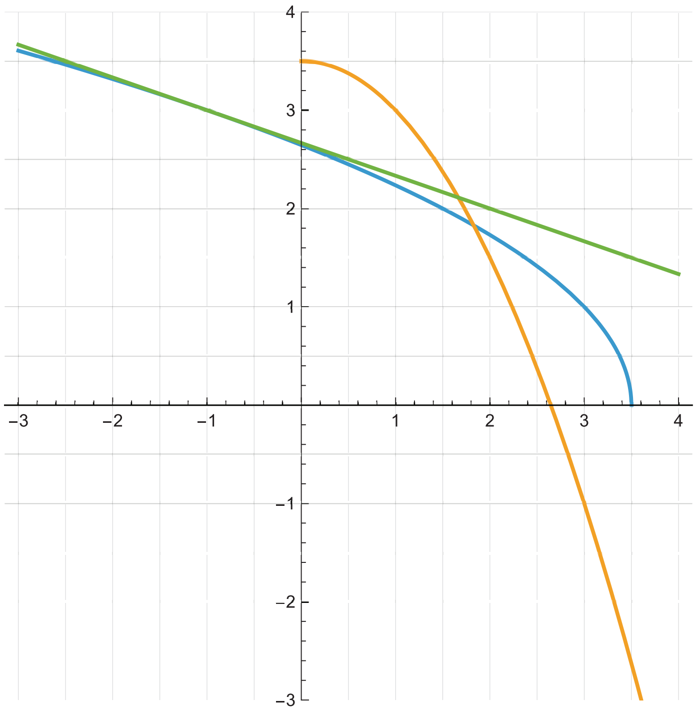
c) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = \left((-2x+7)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(-2+7)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x+7)'$$
$$= \frac{1}{2}(-2x+7)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2) = \frac{-1}{\sqrt{-2x+7}}$$

d) $y = f(x)$ のグラフの $(-1, f(-1))$ における接線の方程式を求めよ．

$f(-1) = 3$，$f'(-1) = -\frac{1}{3}$ なので，接線は $(-1, 3)$ を通り，傾き $-\frac{1}{3}$ の直線．
$y - 3 = -\frac{1}{3}\cdot(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

e) $y = f(x)$ のグラフ，$(-1, f(-1))$ における接線，および逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフの 3 つを右上の座標平面内に描け．



$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{4-x^2}$ とする．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域を求めよ．

根号内 $\geqq 0$ より，$4 - x^2 \geqq 0 \Leftrightarrow -2 \leqq x \leqq 2$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を計算せよ．（定義に戻る必要はない．）

$$f'(x) = x + \frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}} = x + \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \frac{x\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)}{\sqrt{4-x^2}}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ．

$$f'(x) = \frac{x\left(\sqrt{4-x^2}-1\right)}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \text{ より，} x(\sqrt{4-x^2}-1) = 0$$
$\Leftrightarrow x = 0$，または $4 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$.

d) $f'(x) > 0$ となる x の値の範囲を求めよ．

$4 - x^2$ は定義域内で正の値をとるので，$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(3-x^2) > 0$.
これを解き，$-2 < x < 2$ とあわせて $-2 < x - \sqrt{3}$，または $0 < x < \sqrt{3}$

e) $f(x)$ の増減表を完成させよ．

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	

f) $f(x)$ が定義される範囲内での極大値・極小値があればそれを求めよ．

極小値：2 $(x = 0)$

極大値：$\dfrac{5}{2}$ $(x = \pm\sqrt{3})$.

$\boxed{5}$ 次の各々の関数の導関数を求めよ．

a) $f(x) = x\sqrt{1-x}$

$$f'(x) = (x)'\sqrt{1-x} + x\left(\sqrt{1-x}\right)' = \sqrt{1-x} + x\left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= \sqrt{1-x} + x\cdot\tfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x)'$$
$$= \sqrt{1-x} + \frac{-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}}$$
$$= \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x^5+5}$

$$f'(x) = \left((2x^5+5)^{\frac{1}{3}}\right)'$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x^5+5)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(2x^5+5)'$$
$$= \tfrac{10x^4}{3}(2x^5+5)^{\frac{-2}{3}}$$
$$= \frac{10x^4}{3\sqrt[3]{(2x^5+5)^2}}$$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x+5)'(x-2)^2 - (x^2-4x+5)\left((x-2)^2\right)'}{(x-2)^4}$$
$$= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x+5)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}$$
$$= \frac{2(x-2)^2 - 2(x^2-4x+5)}{(x-2)^3}$$
$$= \frac{2(x^2-4x+4-(x^2-4x+5))}{(x-1)^3} = \frac{-2}{(x-2)^3}$$

【2 枚目につづく】

2026 年 1 月 23 日

基礎数学 A2	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人								

6 $f(x) = (\log x)^2$ とする．

a) $f(x)$ の定義域を述べよ．

真数条件より $x > 0$

b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

$$f'(x) = 2\log x \cdot (\log x)' = \frac{2\log x}{x}$$

c) $f'(x) = 0$ となる x と，$f'(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\log x}{x} = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\log x}{x} = 0 \Leftrightarrow \log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

d) $f(x)$ の 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

$$f''(x) = \left(\frac{2\log x}{x}\right)' = \frac{2(\log x)'x - 2\log x \cdot (x)'}{x^2}$$

$$= \frac{2 - 2\log x}{x^2} = \frac{2(1 - \log x)}{x^2}$$

e) $f''(x) = 0$ となる x と，$f''(x) > 0$ となる x の範囲を求めよ．

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-\log x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-\log x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \log x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

f) $f(x)$ の増減表を完成させよ．（増減だけでなくグラフの凹凸も調べ，曲がった矢印 ↗ ↗ ↘ ↘ で表すこと．）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	極小	↗	変曲点	↗

g) $f(x)$ が極大・極小となる x の値があればそれを求めよ．

極大： なし

極小： $x = 1$

h) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

$x = e$

7 曲線 $y = e^{-x}$ の接線で，原点 $(0, 0)$ を通るものの方程式を求めよ．また，その接点の座標を求めよ．

$f(x) = e^{-x}$ とおくと，$f'(x) = -e^{-x}$ なので，

$y = e^{-x}$ の (a, e^{-a}) における接線の方程式は

$$y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow y = -e^{-a}x + e^{-a} + ae^{-a}$$

ここで，$(x, y) = (0, 0)$ とおくと，$0 = e^{-a} + ae^{-a} \Leftrightarrow a = -1$

したがって，求める接線の方程式は $y = -e^{-1}x$

また，接点は $(-1, e)$

8 元本 A を年利 r の連続複利で運用すると，1 年後の元利合計は Ae^r となる．いま，年利が 7%，すなわち $r = 0.07$ だとすると，何年後に元利合計が元本の 2 倍以上になるか．$\log 2 = 0.693$ として計算せよ．

m 年後の元利合計は $A(e^r)^m = Ae^{7m}$.

これが 2 倍以上になるには，$Ae^{mr} \geqq 2A$ とならなければならない．

$e^{mr} \geqq 2$ の両辺の自然対数をとり，$\log e^{mr} \geqq \log 2 \Leftrightarrow mr \geqq \log 2$.

よって，$m \geqq \frac{\log 2}{r} \fallingdotseq \frac{0.693}{0.07} = 0.99\cdots$

すなわち，およそ 9.9 年後に 2 倍以上になる．

— 以上 —

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】