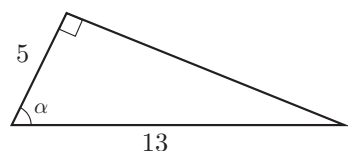


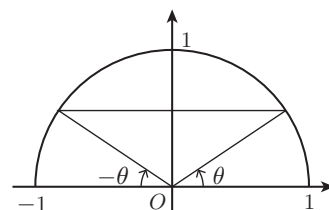
- 1 右の図の直角三角形について、角 α の正弦、余弦、正接を求めよ。

a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$
 b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$
 c) $\tan \alpha = \frac{12}{5}$



- 2 右の図を参照して次の式を $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ で表せ。

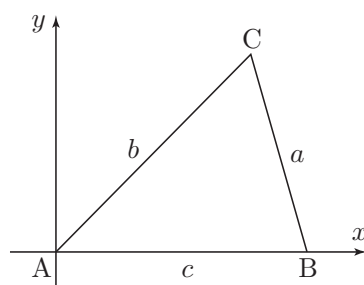
a) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$
 b) $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$
 c) $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$



- 3 次の表を完成させよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	定義されない	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- 4 三角形 $\triangle ABC$ に対して右図のように座標軸を定めれば、3 頂点の座標はそれぞれ、 $A(0, 0)$, $B(c, 0)$, $C(b \cos A, b \sin A)$ となる。2 点 B, C 間の距離の 2 乗を二通りに表すことにより余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ を証明せよ。



まず、 $BC^2 = a^2$ である。一方、2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) の間の距離は $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ だから、

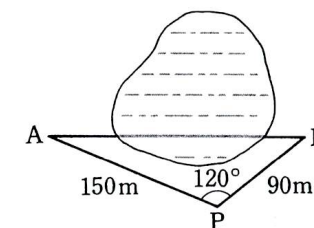
$$\begin{aligned} BC^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A - 0)^2 \\ &= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A \\ &= b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) - 2bc \cos A + c^2 \\ &= b^2 - 2bc \cos A + c^2 \end{aligned}$$

したがって、 $a^2 = b^2 - 2bc \cos A + c^2$ が成り立つ。

- 5 右の図のように、池を隔てた 2 地点 A, B 間の距離を求めるため、 $PA, PB, \angle APB$ を測ったところ、

$$PA = 150\text{m}, PB = 90\text{m}, \angle APB = 120^\circ$$

であった。 A, B 間の距離を求めよ。



$\triangle APB$ に余弦定理を適用して、

$$\begin{aligned} AB^2 &= PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cos P \\ &= 150^2 + 90^2 - 2 \times 150 \times 90 \times \cos 120^\circ \\ &= 44100 \end{aligned}$$

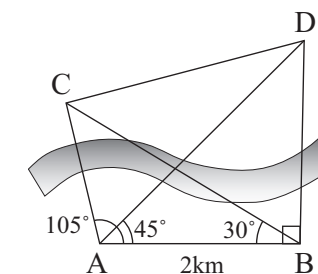
従って、 $AB = \sqrt{44100} = 210(\text{m})$ 。

- 6 2km 離れた 2 地点 A, B から川の向こうにある 2 地点 C, D を見たら、

$$\begin{aligned} \angle BAC &= 105^\circ, \quad \angle BAD = 45^\circ, \\ \angle ABC &= 30^\circ, \quad \angle ABD = 90^\circ \end{aligned}$$

であった。次の 2 地点間の距離を求めよ。

- a) A, C 間および A, D 間の距離 [ヒント: $\triangle ABC$ に正弦定理を用いる。 $\triangle ABD$ は直角二等辺三角形]



$\triangle ABC$ に正弦定理を用いると、 $\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$ 。ゆえに $AC = \sqrt{2} \text{ (km)}$
 $\triangle ABD$ は直角二等辺三角形だから $AD = \sqrt{2} AB = 2\sqrt{2} \text{ (km)}$

- b) C, D 間の距離 [ヒント: $\triangle CAD$ に余弦定理を用いる。]

$\triangle CAD$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos 60^\circ \\ &= (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 2 + 8 - 4 = 6 \end{aligned}$$

よって、 $CD = \sqrt{6}$ 。

- 7 次の角は弧度法でいくらか。

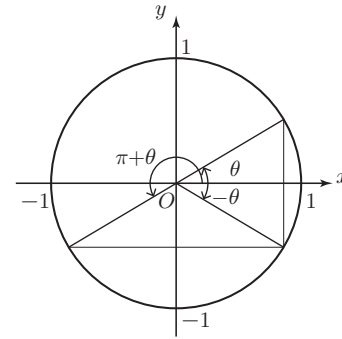
a) $12^\circ = \frac{\pi}{15}$ b) $15^\circ = \frac{\pi}{12}$ c) $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ d) $45^\circ = \frac{\pi}{4}$
 e) $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ f) $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ g) $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ h) $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$

8 弧度法で表された次の角を度数で表せ.

- a) $\frac{\pi}{10} = 18^\circ$ b) $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$ c) $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ d) $\frac{5\pi}{12} = 75^\circ$
 e) $\frac{5\pi}{4} = 225^\circ$ f) $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ g) $\frac{7\pi}{4} = 315^\circ$ h) $3\pi = 540^\circ$

9 右の図を参照して次の式を $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ で表せ.

- a) $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
 b) $\cos(-\theta) = \cos \theta$
 c) $\tan(-\theta) = -\tan \theta$
 d) $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$
 e) $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$
 f) $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$



10 次の値を求めよ.

- a) $\sin \frac{16\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$

11 次の方程式をみたす角 θ を求めよ. ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

- a) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{2} \cos \theta = 1$
 $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

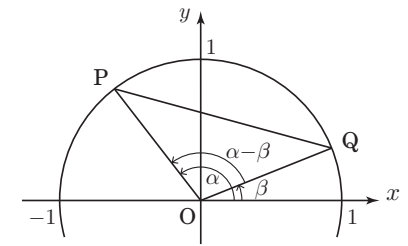
12 次の不等式をみたす角 θ の範囲を求めよ. ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

- a) $\cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin \theta > \frac{1}{2}$
 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$ $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$

13 右の図を参照して三角関数の加法定理を証明したい.

- a) $\triangle OPQ$ に余弦定理を適用して, PQ^2 を $\cos(\alpha - \beta)$ を用いて表せ.

$$PQ^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta)$$



- b) P, Q の座標がそれぞれ $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ であることを使って, PQ^2 を $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \alpha$, $\sin \beta$ を用いて表せ.

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

- c) a) と b) の結果をあわせて, $\cos(\alpha - \beta)$ の加法定理を示せ.

a), b) より, $PQ^2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$.
 これより, $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ を得る.

- d) 関係式 $\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ を用いて, $\sin(\alpha + \beta)$ の加法定理を示せ.

[ヒント: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$.]

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

14 次の方程式を解け. ただし, $0 \leq x < 2\pi$ とする.

- a) $\sin 2x = \cos x$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \cos x \\ \Leftrightarrow \sin x \cos x &= \cos x \\ \Leftrightarrow (2 \sin x - 1) \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= \frac{1}{2} \text{ または } \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

- b) $\cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \cos 2x + 3 \cos x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{1}{2} \text{ または } -2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$