基礎数学 A1	入学年度		学部	学 科		組		番 号		検	氏 名	
金曜 2 限 担当: 鍬田 政人												

● 最終的な答えだけを書くのではなく，途中の計算や説明も簡潔に書くこと．そうでない場合は大きく減点する．

1 次の式を展開せよ．

$(2x-3y)(x^2+xy-2y^2) = 2x^3 - x^2y - 7xy^2 + 6y^3$

2 次の各式を因数分解せよ．

a) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{2}(x-2)^2$

b) $6x^2 - 7xy - 3y^2 = (3x+y)(2x-3y)$

3 $P(x) = x^3+8$, $Q(x) = x^3-3x^2+6x-4$ とする．

a) $P(x)$ を因数分解せよ．

$P(x) = (x+2)(x^2-2x+4)$

b) $Q(1)$ を求めよ

$Q(1) = 1^3 - 3\times 1^2 + 6\times 1 - 4 = 0$

c) $Q(x)$ を因数分解せよ．

$Q(x) = (x-1)(x^2-2x+4)$

d) $P(x)$ と $Q(x)$ の最大公約数，および最小公倍数を求めよ．

［答えは因数分解された形で示せ．］

最大公約数 $= x^2-2x+4$

最小公倍数 $= (x-1)(x+2)(x^2-2x+4)$

4 a) 次の除法を行い，商と余りを求めよ．

$$2x^2-2x-1 \overline{\big)\, x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$$

商 $= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{4}$　　余り $= \frac{7}{2}x - \frac{1}{4}$

5 次の分数式を，整式と分子が分母より低次の分数式との和の形に表せ．

$$\frac{x^3+x-1}{x+1} = x^2 - x + 2 + \frac{-3}{x+1}$$

6 次の各々の式をできるだけ簡単にせよ．

a) $$\frac{4xyz}{\frac{2yz^2}{3x}} = \frac{4x\cancel{y}\cancel{z}\times 3x}{2\cancel{y}z^{\cancel{2}}} = \frac{6x^2}{z}$$

b) $$\frac{\frac{4ab}{c}}{2\left(\frac{ab}{c}\right)^2 - \frac{6ab}{c}} = \frac{4\cancel{\frac{ab}{c}}}{2\left(\frac{ab}{c}\right)^{\cancel{2}} - 6\cancel{\frac{ab}{c}}} = \frac{2}{\left(\frac{ab}{c}\right)-3} = \frac{2c}{ab-3c}$$

c) $$\frac{x-y}{x^2-2xy-3y^2} - \frac{x-2y}{x^2-4xy+3y^2}$$

$$= \frac{x-y}{(x-3y)(x+y)} - \frac{x-2y}{(x-3y)(x-y)}$$
$$= \frac{(x-y)(x-y)-(x-2y)(x+y)}{(x-3y)(x+y)(x-y)}$$
$$= \frac{-y\cancel{(x-3y)}}{\cancel{(x-3y)}(x+y)(x-y)}$$
$$= \frac{-y}{(x+y)(x-y)}$$

d) $$\frac{x^3-y^3}{(x+y)^2} \div \frac{x^3+x^2y+xy^2}{x^2+2xy+y^2} \times \frac{x^2y-xy^2}{x^2y-y^3}$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)^2} \times \frac{(x+y)^2}{x(x^2+xy+y^2)} \times \frac{xy(x-y)}{y(x-y)(x+y)}$$
$$= \frac{x-y}{x+y}$$

e) $$\frac{h}{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a-h}} = \frac{h}{\frac{(a-h)-(a+h)}{(a+h)(a-h)}}$$
$$= \frac{h(a+h)(a-h)}{-2h} = -\frac{1}{2}(a+h)(a-h)$$

7 次の不等式を解け．またその解を数直線上に表せ．

a) $$\begin{cases} 2x^2-5x-3 \leqq 0 & \cdots(1) \\ \dfrac{2x-1}{3} > \dfrac{3x-2}{2} & \cdots(2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow (2x+1)(x-3) \leqq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqq x \leqq 3 \quad \cdots(3)$

(2) $\Leftrightarrow 2(2x-1) > 3(3x-2) \Leftrightarrow -5x > -4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{5} \quad \cdots(4)$

(3), (4) の共通部分を求めると，$-\frac{1}{2} \leqq x < \frac{4}{5}$

b) $|2x+1| > 3$

$|2x+1| > 3 \Leftrightarrow \left|x - (-\frac{1}{2})\right| > \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$ または $x > -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$,

$\Leftrightarrow x < -2$ または $x > 1$

$\boxed{8}$ a）放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ は，放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ をどのように平行移動したものかを述べよ．

$y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1 = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x - 2\right) = \frac{1}{2}\left((x-1)^2 - 3\right)$
$= \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}$ より，$y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ は，$y = \frac{1}{2}x^2$ を
x 軸方向に $+1$，y 軸方向に $-\frac{3}{2}$ だけ平行移動したもの．

b) 2 次関数 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値，最小値を求めよ．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

最大値：3 $(x = 4)$
最小値：$-\frac{3}{2}$ $(x = 1)$

$\boxed{9}$ 2 次方程式 $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} - \frac{1}{6} = 0$ を解け．

両辺 12 倍して $3x^2 - 2x - 2 = 0$．2 次方程式の解の公式より，

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$\boxed{10}$ 周囲の長さ 20cm の長方形において，短い方の辺の長さを x とする．

a) 長い方の辺の長さを x で表せ．長い方の辺の長さが，短い方の辺の長さよりも大きいという条件を考慮して，x の取り得る範囲を求めよ．

長い方の辺の長さ $= \frac{1}{2}(20 - 2x) = 10 - x$.
どちらの辺の長さも正数でなければならないから，$x > 0$，$10 - x > 0$.
さらに，短い辺の長さ $<$ 長い辺の長さ より，$x < 10 - x \Leftrightarrow x < 5$.
以上より，$0 < x < 5$

b) この長方形の面積が $12\,\mathrm{cm}^2$ 以上 $18\,\mathrm{cm}^2$ 未満であるようにするには，長方形の短い方の辺の長さをどのようにすればよいか．

$12 \leqq x(10 - x) < 18$ を解く．
$x^2 - 10x + 12 \leqq 0 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{13} \leqq x \leqq 5 + \sqrt{13}$
$x^2 - 10x + 18 > 0 \Leftrightarrow 5 - \sqrt{7} < x$ または $x > 5 + \sqrt{7}$
$0 < x < 5$ と合わせて，$5 - \sqrt{13} \leqq x < 5 - \sqrt{7}$

$\boxed{11}$ 1 杯の原価が 100 円のカフェラテを 1 杯 320 円で販売し，毎日 120 杯の売り上げがある．もし値上げをすれば，1 杯 10 円の値上げにつき 5 杯の割合で売り上げが減少するという．原材料費の高騰で原価が 120 円かかるようになったので，値上げをすることにしたが，利益を最大にするには 1 杯いくらで販売すればよいか．

x 円値上げするとする．このとき，売り上げは $120 - \frac{1}{2}x$ 杯になるので，

利益 $= (320 + x - 120)\left(120 - \frac{1}{2}x\right)$

$= -\frac{1}{2}(x - 20)^2 + 24200$

したがって，20 円値上げしたとき，すなわち，
売価が 340 円のとき利益が最大になる．

$\boxed{12}$ 次の各々の式を簡単にせよ．ただし，a，b は正の定数とする．

a) $\sqrt{-a\sqrt[3]{-a^3}} = \sqrt{-a(-a)} = \sqrt{a^2} = a$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^4} \times \sqrt{ab^3}}{\sqrt[6]{a^5b^2}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{6}}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{2}}$

c) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}} \times a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{\sqrt{3}} 3^3 = \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^6 = 6$

e) $a^{3\log_a 2} = a^{\log_a 2^3} = 2^3 = 8$

f) $\log_2 12 + 2\log_2 3 - \log_2 27 = \log_2 \dfrac{12 \times 3^2}{27} = \log_2 4 = 2$

g) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \cdot \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 5} \cdot \dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 7} = \dfrac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 3} = 2$

h) $\log_5\left(7 + 2\sqrt{6}\right) + \log_5\left(7 - 2\sqrt{6}\right) = \log_5(7 + 2\sqrt{6})(7 - 2\sqrt{6})$
$= \log_5(49 - 4 \times 6) = \log_5 5^2 = 2$

$\boxed{13}$ $\sqrt{27}$, $\sqrt[4]{243}$, $\sqrt[3]{81}$ を小さいものから順に並べよ．
［ヒント：それぞれを 3^a の形に表すとよい．］

$\sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[4]{243} = 3^{\frac{5}{4}}$, $\sqrt[3]{81} = 3^{\frac{4}{3}}$ であり，$\frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ だから，
$\sqrt[4]{243} < \sqrt[3]{81} < \sqrt{27}$

$\boxed{14}$ 光が鏡で 1 回反射するごとに，その光度の 20% を失うという．このような反射をくり返すとき，光度がはじめてもとの光度の 20% 以下になるのは何回目の反射のときか．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ として答えよ．

$\left(\frac{8}{10}\right)^n \leqq \frac{1}{10}$ を解く．
両辺の $\log_{10}$ をとって，
$\log_{10}\left(\frac{8}{10}\right)^n < \log_{10}\frac{2}{10}$
$\Leftrightarrow n(3\log_{10} 2 - 1) < (\log_{10} 2 - 1)$
$\Leftrightarrow n(3 \times 0.3010 - 1) < 0.3010 - 1)$
$\Leftrightarrow -0.09691n < -0.699$
$n > \Leftrightarrow 7.20$
よって，8 回目の反射のとき．

【2 枚目につづく】

2024 年 7 月 19 日

基礎数学 A1	入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	氏 名	
金曜２限 担当: 鍬田 政人								

$\boxed{14}$ 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-2}$$
$$=\frac{1+1+1}{1-2}=-3$$

$\boxed{15}$ 関数 $f(x)=(2x-3)^2$ について，以下の問いに答えよ．

a) $x=-1$ から $x=-1+h$ まで変化したときの $f(x)$ の平均変化率をなるべく簡単な形で表せ．

$$\frac{f(-1+h)-f(h)}{h}=\frac{(2(-1+h)-3)^2-(2(-1)-3)^2}{h}$$
$$=\frac{(2h-5)^2-(-5)^2}{h}=\frac{4h^2-20h+25-25}{h}$$
$$=\frac{\cancel{h}(4h-20)}{\cancel{h}}=4h-20$$

b) $f(x)$ の $x=-1$ における微分係数 $f'(-1)$ を a) で求めた平均変化率の極限として求めよ．

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}(4h-20)=-20$$

$\boxed{16}$ $f(x)=x(5-x)(8-x)$ とする．以下の問いに答えよ．

a) $f(x)$ の導関数を求めよ．（定義に従って計算する必要はない．）

$f(x)=x^3-13x^2+40x$ だから，
$f'(x)=3x^2-26x+40.$

b) $f'(x)=0$ となる x，および $f'(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．

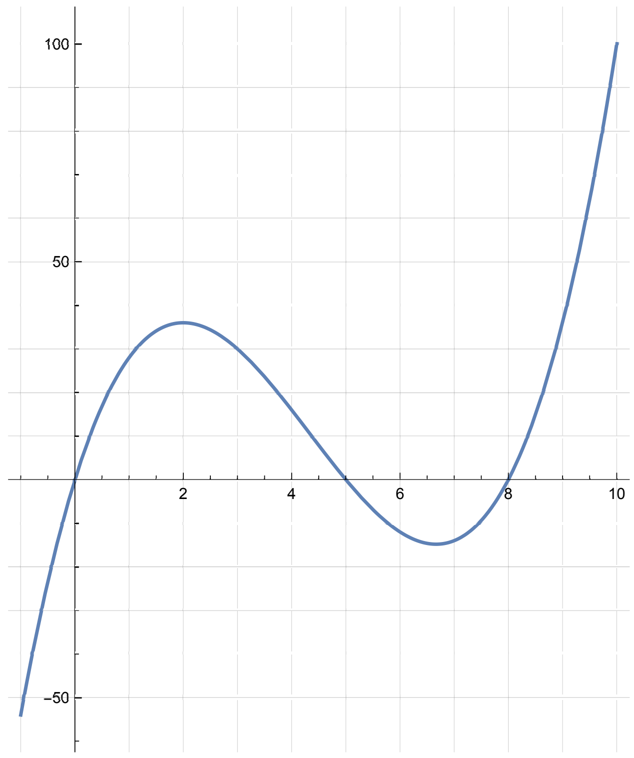
$f'(x)=3x^2-26x+40=(3x-20(x-2)$ より，
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2,\frac{20}{3}$
$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<2, x>\frac{20}{3}$

c) $f(x)$ の増減表を完成させ，$f(x)$ の極大値および極小値を求めよ．

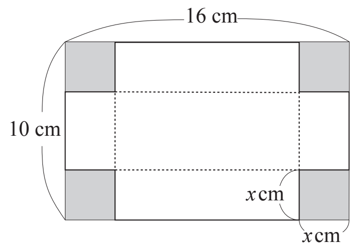
x	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{20}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	36	$\searrow$	$-\frac{400}{27}$	$\nearrow$

極大値 $=36$　　　極小値 $=-\frac{400}{27}$

d) ここまでの結果を反映させ，$y=f(x)$ のグラフをなるべく丁寧に描け．［x 軸，y 軸のスケールに注意せよ．］



e) 下のような，縦 10cm，横 16cm の長方形の厚紙がある．この四隅から 1 辺の長さが x cm の正方形を切り取り，ふたのない箱を作る．



(i) x の取り得る範囲を求めよ．

まず，$x>0$ でなければならない，さらに，縦の辺から $x$cm の正方形を 2 個切り取ってもまだ残りの長さが正にならないといけないから，
$10-2x>0 \Leftrightarrow x<5.$

(答) $0<x<5$

(ii) 箱の容積 V を $f(x)$ を用いて表せ．

$V=(10-2x)\times(16-2x)\times x=4x(5-x)(8-x)=4f(x).$

(答) $V=4f(x)$

(iii) V の最大値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

c) で作った増減表を参照すると，$V=4f(x)$ は $x=2$ のとき，最大値 144 をとる．

(答) 最大値 144 ($x=2$)

【以上】

【解答用紙が足らなければこの部分も使用して下さい】