13. 復習問題 略解

$\boxed{1}$ a) $A \cap \overline{B} = \{n \mid n$ は 6 の倍数ではない 2 の倍数 $\}$ だから， $n(A \cap B) = 50 - 16 = 34.$

b) $n\big((A \cap B) \cup C)\big) = n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap B \cap C) = 16 + 20 - 3 = 33.$

$\boxed{2}$ $B = \{x \mid 1 - a \leqq x \leqq 1 + a\}$ であることに注意する.

a) $0 < a < 2$

b) $3 \leqq a < 4$

c) $A \subset B$ となるような a の範囲を求めればよい．そのような a の範囲は $a \geqq 5$.

$\boxed{3}$ a) 36 個（$\Omega = \{(a, b) \mid a$， b は 1 から 6 までの自然数 $\}$ だから， $n(U) = 36$）

b) 事象の個数 $=$ Ω の部分集合の個数だから， 2^{36} 個

c) $A = \{(4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

d) $\overline{B}$ は「出た目の数がともに偶数である」であり， $n(\overline{B}) = 3 \times 3 = 9$．したがって， $n(B) = n(U) - n(\overline{B}) = 27$.

e) $A \cap B = \{(4, 5), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)\}$ より， $n(A \cap B) = 5$． $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{5}{8}$．また， $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$， $P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ なので， $P(A \cap B) = \frac{5}{36} \neq P(A)P(B) = \frac{6}{36}$ だから， A と B は独立ではない.

$\boxed{4}$ a) $P(C) = 0.01$， $P_C(Y) = 0.7$， $P_{\overline{C}}(\overline{Y}) = 0.999$.

b) $P(C \cap Y) = P(C) \times P_C(Y) = 0.007$， $P(\overline{C} \cap \overline{Y}) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(\overline{Y}) = 0.98901$

検査 ＼ ウィルス	感染 (C)	非感染 ($\overline{C}$)	計
陽性 (Y)	0.7 %	0.099 %	0.799 %
陰性 ($\overline{Y}$)	0.3 %	98.901 %	99.201%
計	1 %	99 %	100 %

b) 求める確率は $P_{\overline{Y}}(C)$． $P_{\overline{Y}}(C) = \frac{P(C\cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.7}{0.799} = 0.876.$

$\boxed{5}$ a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ より $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = \frac{1}{5} + b - \frac{3}{5} = b - \frac{2}{5}$.

b) A と B が独立であるためには $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことが必要十分． a) の答えを用いると， $2 - b = \frac{1}{5} \times b$ が必要十分条件．これを解いて， $b = \frac{1}{2}$.

$\boxed{6}$ A:「どちらかが偶数」， B:「両方の目が偶数」とすると，求める確率は $P_A(B)$． $P(A) = \frac{3}{4}$， $P(A\cap B) = P(B) = \frac{1}{4}$ だから， $P_A(B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

$\boxed{7}$ $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{13}$, $P(C) = \frac{1}{26}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{52} = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = \frac{1}{52} \neq P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = \frac{1}{26} \neq P(B)P(C)$. したがって， A と B は独立， A と C， B と C は独立ではない.

ジョーカーを 1 枚含む場合， $P(A) = \frac{13}{53}$, $P(B) = \frac{12}{53}$, $P(C) = \frac{2}{53}$, $P(A \cap B) = \frac{156}{53^2} = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = \frac{1}{53} \neq P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = \frac{2}{53} \neq P(B)P(C)$ なので，ジョーカーを含まない場合と同じ.

$\boxed{8}$ a) 帽子を忘れずに家に帰ってくる確率は $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$．求める確率はその余事象の確率なので，$1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$． b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$． c) $\frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}} = \frac{20}{61}$． d) 同様にして，A で忘れて帰る確率は $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{61}{125}} = \frac{25}{61}$，C で忘れて帰る確率は $\frac{\frac{16}{125}}{\frac{61}{125}} = \frac{25}{61}$．したがって，A の家に忘れて帰る確率が一番高い．

$\boxed{9}$ a) $X \sim B(4, \frac{1}{2})$ だから，$E(X) = 2$，$V(X) = 1$.
b) $E(X) = \frac{35}{18} \fallingdotseq 1.94$，$V(X) = \frac{655}{324} \fallingdotseq 2.05$
c)

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

より $E(X) = \frac{12}{7}$，$V(X) = \frac{24}{49}$.

$\boxed{10}$ 表の出た硬貨の金額の和を X とする．確率分布は

X	0	50	100	150	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

だから，
$E(X) = 75$ （円），$\sigma(X) = 25\sqrt{5} \fallingdotseq 55.9$ （円）

$\boxed{11}$ $E(Y) = aE(X) + b$，$V(Y) = a^2V(X)$ が成り立つので，$\begin{cases} 0 = 5a + b \\ 1 = 100a^2 \end{cases}$ を解いて，$a = \frac{1}{10}$，$b = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{12}$
$$V(X+Y) = E\big((X+Y)^2\big) - \big(E(X)+E(Y)\big)^2 = E(X^2+2XY+Y^2) - \big(E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y^2)\big)$$
$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - \big(E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2\big)$$
$$=\big(E(X^2) - E(X)^2\big)+2\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big) + \big(E(Y^2 - E(Y)^2\big) = V(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y)$$

$\boxed{13}$ さいころの出る目の数を Y，表の出た硬貨の枚数を Z とすると，$X = YZ$．Y と Z は明らかに独立であるから，$E(X) = E(YZ) = E(Y)E(Z)$．そして，$E(Y) = \frac{7}{2}$，$E(Z) = 1$ だから $E(X) = \frac{7}{2}$.

$\boxed{14}$ a) ${}_8C_0\big(\frac{3}{4}\big)^8 + {}_8C_1\big(\frac{1}{4}\big)\big(\frac{3}{4}\big)^7 + {}_8C_2\big(\frac{1}{4}\big)^2\big(\frac{3}{4}\big)^6 = \frac{3^8 + 8\cdot 3^7 + 28\cdot 3^6}{4^8} = \frac{3^6\cdot 61}{4^8} = \frac{44469}{65536} \fallingdotseq 0.679$.
b) でたらめに答えたときの X の期待値 $E(X)$ は $E(X) = np = 8\cdot\frac{1}{4} = 2$．$(X,Y) = (2,0), (8,100)$ を通る直線の式を求めると，$Y = \frac{100}{6}(X-2) \fallingdotseq 16.7X - 33.3$

$\boxed{15}$ a) $X \sim B(1000, 0.05)$
b) $E(X) = 1000 \times 0.05 = 50$，$V(X) = 1000 \times 0.05 \times (1 - 0.05) = 47.5$.

$\boxed{16}$ a) X の確率分布は

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

$E(X) = \frac{3}{2}$，$V(X) = \frac{15}{28}$.

b) $Y \sim B(4, \frac{3}{8})$ だから，$E(Y) = \frac{3}{2}$，$V(Y) = 4 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$.

$\boxed{17}$ a) $X \sim B(6, \frac{1}{3})$，$E(X) = 2$，$V(X) = \frac{4}{3}$，$\sigma(X) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
b) 3 の倍数の目が出なかった回数は $6 - X$ だから，$Y = (+2)X + (-1)(6-X) = 3X - 6$
c) $E(Y) = E(3X-6) = 3E(X) - 6 = 2 \times 3 - 6 = 0$，$V(Y) = V(3X-6) = 3^2V(X) = 12$，$\sigma(X) = 2\sqrt{3}$.

担当： 鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)