9 ❦ ハミング符号　　2024年度　総合教育科目演習 I（水曜２限）

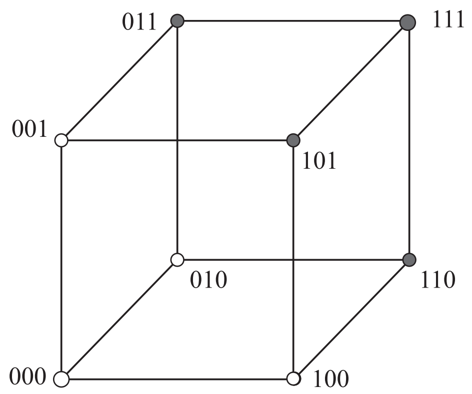
入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B		1			氏名	

通信による情報伝達では，情報源から出された情報（文字，画像，音声など）はそのまま伝達できないので，数字や文字，記号による情報記号に変換され，「符号語」に符号化されて通信路を通って受信者へと伝達される．現在使われている，いわゆるデジタル技術では，情報記号や符号語として 000，1101110 のようなすべて 0 と 1 の記号の列が用いられる．これらは，$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ の元を成分とするベクトル $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$ とみなすことができる．

符号語とは，情報記号に伝送中に生じる誤りを検出・訂正するための検査記号を付加したものである．そして，符号語の集合を**符号**と呼ぶ．また，符号語に用いられている記号の数を符号の**長さ**と呼ぶ．例えば，長さ 3 の符号語は

$$000,\quad 001,\quad 010,\quad 011,\quad 100,\quad 101,\quad 110,\quad 111$$

の計 8 個ある．



$\boxed{1}$ 長さ 4 の符号に含まれる符号語をすべてあげよ．

符号語はすべて 0 と 1 だけからなる記号列であるから，符号語において誤りが生じるということは，該当する箇所の 0 と 1 が入れ替わるということである．ここで $1 + 1 = 0$ となる $\mathbb{F}_2$ における加法を用いると，符号語のある桁（ビットと呼ぶ）に誤りが生じることはすなわち，そのビットに $\mathbb{F}_2$ の意味で 1 を加えるということに他ならない．例えば，長さ 8 の符号 11101010 の 3 ビット目と 6 ビット目に誤りが生じたとすると，11101010 をベクトル $(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ とみなし，これに $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$ を加え，

$$(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0) + (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

が受信側が受け取る符号語となる．一般に，送信した符号語を $\vec{u}$，誤りパターンを $\vec{e}$，受信した符号語を $\vec{r}$ とすると，

$$\vec{u} + \vec{e} = \vec{r}$$

が成り立つ．もちろん，ベクトルの成分の加法は $\mathbb{F}_2$ における加法とする．

2 つの符号語 $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ の**ハミング距離**とは，対応するビット成分で値が異なるものの数である．例えば，上の $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ と $(1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ のハミング距離は 4 である．

$$\begin{array}{rl} & (\ 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0\ ) \\ + & (\ 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1\ ) \\ \hline & (\ 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1\ ) \rightarrow 1 \text{ が } 4 \text{ 個} \end{array}$$

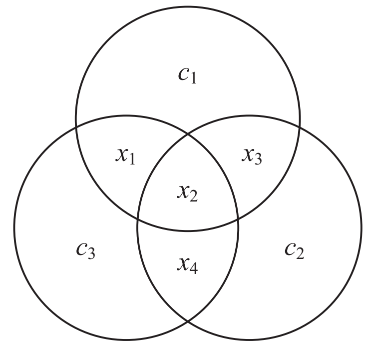
$\boxed{2}$ 01001101 と 10111100 のハミング距離を求めよ．

• ハミング符号 $H(7, 4)$

パリティ検査符号の考え方を拡張して，符号に誤り検出能力に加えて誤り訂正能力を持たせることを考える．いま，長さ 4 の情報ビット $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ に対し，右の図の各円内のパリティが 0 になるように c_1, c_2, c_3 を決める．すなわち

$$\begin{cases} c_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ c_2 = x_2 + x_3 + x_4 \\ c_3 = x_1 + x_2 + x_4 \end{cases}$$

となるように決める．そして，$\vec{x}$ に検査ビット c_1, c_2, c_3 を付加して長さ 7 の符号 $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4, c_1, c_2, c_3)$ を作る．



たとえば，情報ビットが 1101 であれば，

$$\begin{cases} c_1 = 1 + 1 + 0 = 0 \\ c_2 = 1 + 0 + 1 = 0 \\ c_3 = 1 + 1 + 1 = 1 \end{cases}$$

となり，$\vec{u} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$ となる．

ハミング符号の誤り訂正の原理

ハミング符号は 1 個の誤りを訂正できる．ここでは，**シンドローム**と呼ばれる数の組を用いて，訂正原理を説明する．符号語 $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4, c_1, c_2, c_3)$ に対して，シンドローム s_1, s_2, s_3 を次のように計算する．

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + c_1 \\ s_2 = x_2 + x_3 + x_4 + c_2 \\ s_3 = x_1 + x_2 + x_4 + c_3 \end{cases}$$

各シンドロームは，表の図の 3 つの円内の 4 ビットがパリティ検査符号であると考えて，誤りがあるかを検査するものである．例えば，$(s_1, s_2, s_3) = (1, 1, 0)$ であるとする．このとき，誤りはひとつだけあると仮定すると，それは上の円と右下の円内に属し，左下の円内にはないことを意味する．したがって，誤りは x_3 であることがわかる．

【裏に続く】

3 整数 0 から 15 までを 2 進法で表し，それを長さ 4 の情報ビットとみなし，それぞれについて検査ビットを求め，以下の表を完成させせよ.

10 進法	2 進法	検査ビット	符号語
0	0000	000	0000000
1	0001		
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13	1101	001	1101001
14			
15	1111	111	1111111

4 1011011 の誤りを訂正せよ.

5 上の表にある 16 個の符号語の任意の符号間のハミング距離は 3 以上であることを確かめよ.
[手計算で確かめるとすると $16 \times 15 \div 2 = 120$ 組のハミング距離を計算しなければならない...]

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)