入学年度		学部	学 科		組		番 号			検	フリガナ	
		B		1							氏 名	

a は正の定数で $a \neq 1$ とするとき，a を底とする x の指数関数

$$f(x) = a^x$$

の導関数を求めたい．いま，x が $x+h$ まで変化したときの $f(x) = a^x$ の平均変化率を指数法則を用いて変形すると

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$$

を得る．したがって導関数 $f'(x)$ は

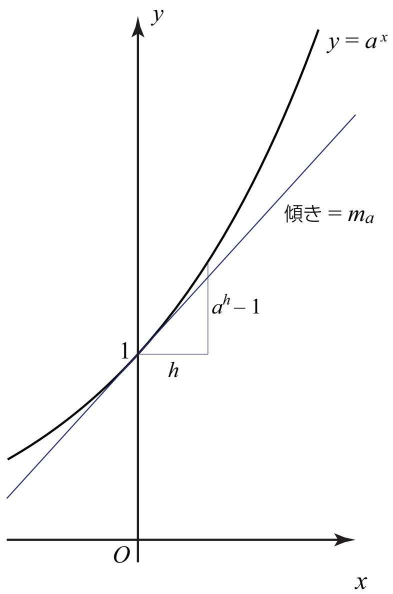
(1) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$

と計算できる．ここで $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = m_a$ とおくと，

(2) $f'(x) = a^x \cdot m_a$

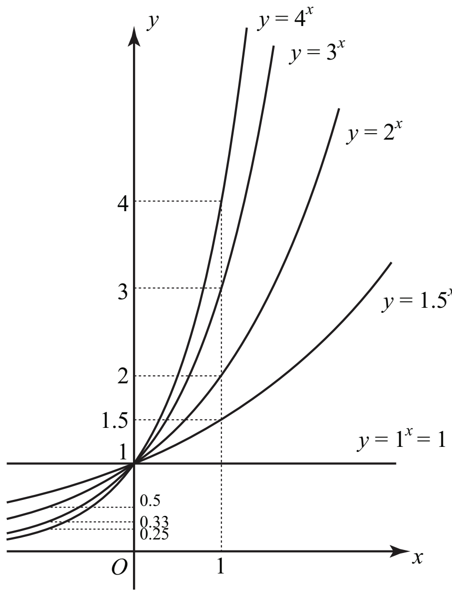
となり，m_a さえわかれば $f'(x)$ がわかる．いま，

(3) $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{0+h}-a^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$



であることに注意すると，m_a は曲線 $y = a^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の傾きにほかならない．すなわち，$f'(x)$ を計算するためには，$x = 0$ における接線の傾き m_a さえ計算すればよいことがわかる．

そこで，(3) の極限値 m_a がどのような値になるかを考えてみる．右の図を見ると，曲線 $y = a^x$ の上の点 $(0, 1)$ における接線の傾き m_a は，a が大きくなるほど大きくなることがわかる．そこでまず実験として $a = 2$ と $a = 3$ のときに，h のいろいろな値に対して $\frac{a^h-1}{h}$ の値を数値計算をしてみよう．スマートフォンの関数電卓アプリなどを用いて，右のページの表を作ってみる．大抵のスマートフォンの関数電卓アプリでは有効数字 16 桁の計算ができるので，できる限りくわしく計算してみてほしい．そして，その結果として，$h \to 0$ としたとき，$\frac{2^h-1}{h}$ と $\frac{3^h-1}{h}$ がそれぞれどのような値に近づくか見当をつけてみよう．



例えば $\frac{2^{0.01}-1}{0.01}$ を計算するには $(2^{0.01}-1) \times 100$ を計算すればよいので，シンプルな関数電卓（例えば iPhone の電卓アプリ）では次の順序で入力すればよい．

$$\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$$

h	$\frac{2^h-1}{h}$	$\frac{3^h-1}{h}$
0.1	0.717734625362932...	1.161231740339044...
0.01	0.695555005671881...	1.104669193785359...
0.001		
10^{-4}		
10^{-5}		
10^{-6}		
10^{-7}		
10^{-8}		
10^{-9}		
10^{-10}		
↓	↓	↓
0		

この表より $\frac{2^h-1}{h}$，$\frac{3^h-1}{h}$ はそれぞれある 0 でない一定値に近づく様子が見て取れ，その値は次のように推測できる．

$$m_2 = \lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{}, \qquad m_3 = \lim_{h\to 0} \frac{3^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{}$$

前ページの結果を見ると $m_2 < 1$ かつ $m_3 > 1$ であることがわかる．したがって，2 と 3 の間に $m_a = 1$ となるような a の値があるだろうと考えられる．実は，$m_a = 1$ となるような a の値は単純な有理数ではないこと知られているので，そのような数を e という文字で表し，**Nepier の数**とか**自然対数の底**と呼ぶ．すなわち，数 e は次の式をみたすような数である．

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \tag{4}$$

すると (1) と (4) から，$f(x)=e^x$ ならば $f'(x)=\lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$ が得られる．

指数関数の e^x の導関数

$$\left(e^x\right)'=e^x$$

$\boxed{1}$ 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a}=a$ という関係が成り立つ．これより，$a^x=(e^{\log a})^x=e^{x\log a}$ である．そこで，$y=e^u$，$u=(\log a)x$ とおいて，合成関数の微分公式を用いて，指数関数 a^x の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ．［ヒント：$\log a$ は定数であることに注意.］

$\boxed{2}$ $f(x)=e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x)=\log x$ である．そこで，$f'(x)=e^x$ であることと，逆関数の微分公式を用い，$f^{-1}(x)=\log x$ の導関数が $\frac{1}{x}$ であること，すなわち $\left(\log x\right)'=\frac{1}{x}$ であることを示せ．

$\boxed{3}$ 前問によれば，$f(x)=\log x$ としたとき，$f'(1)=\frac{1}{1}=1$ となることがわかる．一方，

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\log(1+h)\right)=\lim_{h\to 0}\left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

である．（最後の等号は log が連続関数なので log と $\lim_{h\to 0}$ の順序が入れ替えらることによる．）よって，

$$f'(1)=\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=1$$

となり，$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は log をとると 1 になるような値，すなわち，

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

となる．そこで，次の表を用い $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算してみよう．$h=1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots, 10^{-9}$ として関数電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し，表の空欄を埋め，極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ．

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
0.1	2 . 5937424601
0.01	2 . 70481382941526...
0.001	.
10^{-4}	.
10^{-5}	.
10^{-6}	.
10^{-7}	.
10^{-8}	.
10^{-9}	.
↓	↓
0	.

これより，$e=$ $\boxed{}$ と推測される．