| 入学年度 | 学部 | 学 科 | | 組 | | 番 | 号 | 検 | フリガナ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | | 1 | | | | | 氏 名 |

$a$ は正の定数で $a \neq 1$ とするとき，$a$ を底とする $x$ の指数関数

$$f(x) = a^x$$

の導関数を求めたい．いま，$x$ が $x+h$ まで変化したときの $f(x) = a^x$ の平均変化率を指数法則を用いて変形すると

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$$

を得る．したがって導関数 $f'(x)$ は

(1) $\displaystyle f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$

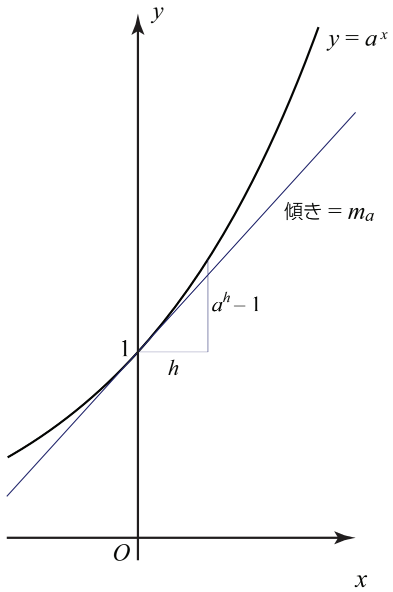
と計算できる．ここで $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = m_a$ とおくと，

(2) $\quad f'(x) = a^x \cdot m_a$

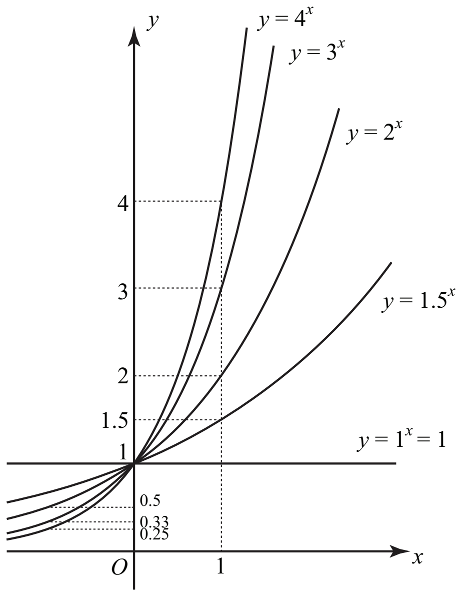
となり，$m_a$ さえわかれば $f'(x)$ がわかる．いま，

(3) $\displaystyle \quad f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{0+h}-a^0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$

であることに注意すると，$m_a$ は曲線 $y = a^x$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の傾きにほかならない．すなわち，$f'(x)$ を計算するためには，$x = 0$ における接線の傾き $m_a$ さえ計算すればよいことがわかる．




　そこで，(3) の極限値 $m_a$ がどのような値になるかを考えてみる．右の図を見ると，曲線 $y = a^x$ の上の点 $(0, 1)$ における接線の傾き $m_a$ は，$a$ が大きくなるほど大きくなることがわかる．そこでまず実験として $a = 2$ と $a = 3$ のときに，$h$ のいろいろな値に対して $\dfrac{a^h-1}{h}$ の値を数値計算をしてみよう．スマートフォンの関数電卓アプリなどを用いて，右のページの表を作ってみる．大抵のスマートフォンの関数電卓アプリでは有効数字 16 桁の計算ができるので，できる限りくわしく計算してみてほしい．そして，その結果として，$h \to 0$ としたとき，$\dfrac{2^h-1}{h}$ と $\dfrac{3^h-1}{h}$ がそれぞれどのような値に近づくか見当をつけてみよう．




例えば $\dfrac{2^{0.01}-1}{0.01}$ を計算するには $(2^{0.01}-1)\times 100$ を計算すればよいので，シンプルな関数電卓（例えば iPhone の電卓アプリ）では次の順序で入力すればよい．

$\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

| $h$ | $\dfrac{2^h-1}{h}$ | $\dfrac{3^h-1}{h}$ |
|---|---|---|
| 0.1 | 0.717734625362932 . . . | 1.161231740339044 . . . |
| 0.01 | 0.695555005671881 . . . | 1.104669193785359 . . . |
| 0.001 | 0.693387462580633 . . . | 1.099215984204053 . . . |
| $10^{-4}$ | 0.693171203765692 . . . | 1.098672638326159 . . . |
| $10^{-5}$ | 0.693149582830565 . . . | 1.098618323435013 . . . |
| $10^{-6}$ | 0.693147420786508 . . . | 1.098612892142811 . . . |
| $10^{-7}$ | 0.693147204582597 . . . | 1.098612349015560 . . . |
| $10^{-8}$ | 0.693147182962210 . . . | 1.098612294702855 . . . |
| $10^{-9}$ | 0.693147180800172 . . . | 1.098612289271584 . . . |
| $10^{-10}$ | 0.693147180583968 . . . | 1.098612288728457 . . . |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| 0 | 0.69314718 . . . | 1.09861228 . . . |

この表より $\dfrac{2^h-1}{h}$，$\dfrac{3^h-1}{h}$ はそれぞれある 0 でない一定値に近づく様子が見て取れ，その値は次のように推測できる．

$$m_2 = \lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{0.69314718}, \qquad m_3 = \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} \fallingdotseq \boxed{1.09861228}$$

前ページの結果を見ると $m_2 < 1$ かつ $m_3 > 1$ であることがわかる．したがって，2 と 3 の間に $m_a = 1$ となるような $a$ の値があるだろうと考えられる．実は，$m_a = 1$ となるような $a$ の値は単純な有理数ではないこと知られているので，そのような数を $e$ という文字で表し，**Nepier の数**とか**自然対数の底**と呼ぶ．すなわち，数 $e$ は次の式をみたすような数である．

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \tag{4}$$

すると (1) と (4) から，$f(x)=e^x$ ならば $f'(x)=\lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$ が得られる．

**指数関数の $e^x$ の導関数**

$$(e^x)'=e^x$$

$\boxed{1}$ 指数関数と対数関数の互いには $e^{\log a}=a$ という関係が成り立つ．これより，$a^x=(e^{\log a})^x=e^{x\log a}$ である．そこで，$y=e^u$，$u=(\log a)x$ とおいて，合成関数の微分公式を用いて，指数関数 $a^x$ の導関数 $(a^x)'$ をもとめよ．［ヒント：$\log a$ は定数であることに注意．］

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot(\log a)=e^{x\log a}(\log a)=a^x\log a$$

$\boxed{2}$ $f(x)=e^x$ とすると，自然対数関数 $\log x$ はその逆関数である，すなわち $f^{-1}(x)=\log x$ である．そこで，$f'(x)=e^x$ であることと，逆関数の微分公式を用い，$f^{-1}(x)=\log x$ の導関数が $\frac{1}{x}$ であること，すなわち $(\log x)'=\frac{1}{x}$ であることを示せ．

$$(\log x)'=\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{f'(\log x)}=\frac{1}{e^{\log x}}=\frac{1}{x}$$

$\boxed{3}$ 前問によれば，$f(x)=\log x$ としたとき，$f'(1)=\frac{1}{1}=1$ となることがわかる．一方，

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\log(1+h)\right)=\lim_{h\to 0}\left(\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

である．（最後の等号は log が連続関数なので log と $\lim_{h\to 0}$ の順序が入れ替えらることによる．）よって，

$$f'(1)=\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=1$$

となり，$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は log をとると 1 になるような値，すなわち，

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

となる．そこで，次の表を用い $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を計算してみよう．$h=1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots, 10^{-9}$ として関数電卓を用いて $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算し，表の空欄を埋め，極限値 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を推測せよ．

| $h$ | $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ |
|---|---|
| 0.1 | 2.5937424601 |
| 0.01 | 2.70481382941526... |
| 0.001 | 2.71692393223589...... |
| $10^{-4}$ | 2.71814592682522... |
| $10^{-5}$ | 2.71826823717449... |
| $10^{-6}$ | 2.71828046931938... |
| $10^{-7}$ | 2.71828169254497... |
| $10^{-8}$ | 2.71828181486764... |
| $10^{-9}$ | 2.71828182709990... |
| ↓ | ↓ |
| 0 | 2.7182818... |

これより，$e=$ $\boxed{2.7182818...}$ と推測される．

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)