入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

以下の問題の目的は，公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである．したがって，すでに証明された場合以外，この公式を用いて答えてはならない．

$\boxed{1}$ 【 a が自然数の場合】任意の正の整数 n について関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = x^n$ と定義する．すなわち，$f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3, \cdots$ となる関数の列 $f_n(x)$ を考える．このとき，

$$f_n{}'(x) = nx^{n-1} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

が成り立つこと，すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい．

(I) $n = 1$ のとき．$f_1(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1{}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} =$$

よって，$(*)$ は $n = 1$ のとき確かに成り立つ．

(II) $n = k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する．すなわち $f_k{}'(x) = kx^{k-1}$ が成り立つとする．すると，$f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから，積の微分公式を用いて，

$$f_{k+1}{}'(x) = \left(f_1(x)f_k(x)\right)' =$$

［結論まできちんと述べよ．］

$\boxed{2}$ 【 a が負の整数の場合】n を自然数として，$(x^{-n})'$ を求めたい．$(x^{-n})' = \left(\dfrac{1}{x^n}\right)'$ と書き直し，商の微分公式を用いて計算し，さらにそれを Ax^B の形に表すことにより，$(x^{-n})'$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 【 $a = 1/n$ の場合】n を自然数として，$(x^{\frac{1}{n}})'$ を求めたい．関数 $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ は，関数 $f(x) = x^n$ の逆関数である．すなわち $\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x)$ である．

a) 逆関数の微分公式を用いて $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ であることを示せ．

b) 上の結果を分数指数を用いて Ax^B の形に表すことにより，公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が $a = \dfrac{1}{n}$ のときにも成り立つことを証明せよ．

$\boxed{4}$ 【 a が有理数の場合】m, n を自然数として，$(x^{\frac{m}{n}})'$ を求めたい．$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い，合成関数の微分公式を用いて $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)'$ を計算し，公式 $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ が $a = \dfrac{m}{n}$ のときにも成り立つことを証明せよ．［ヒント：$f(x) = x^m,\ g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として，$x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい．］

5 $x \neq 1$ で，n が自然数のとき，$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つ．この両辺を x について微分することにより，$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ を求めよ．

6 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，次の導関数を $f(x)$, $f'(x)$ を用いて表せ．.

a) $\left(\left(f(x)\right)^n\right)' =$

b) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' =$

7 次の関数を変数 x で微分せよ．

a) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$f'(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$f'(x) =$

8 微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がまた微分可能であれば， その導関数 $(f'(x))'$ を $f''(x)$ で表し, もとの関数 $f(x)$ の第二次導関数と呼ぶ. 関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，次の等式を証明せよ．

$$\left(f(x)g(x)\right)'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)