

以下の問題は、公式 $(x^a)' = ax^{a-1}$ が任意の有理数 a について成り立つことを系統的に証明することである。したがって、すでに証明された場合以外、この公式を用いて答えてはならない。

1 【 n が自然数の場合】 任意の自然数 n について、 $f_n(x) = x^n$ とおく。すなわち、 $f_1(x) = x$ 、 $f_2(x) = x^2$ 、 $f_3(x) = x^3$ 、... となる関数の列 $f_n(x)$ を考える。このとき、 $f_n'(x) = nx^{n-1}$ が成り立つこと、すなわち $(x^n)' = nx^{n-1}$ であることを数学的帰納法で証明したい。

(I) $n = 1$ のとき、 $f_1'(x)$ を定義に従って計算すると

$$f_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

(II) $n = k$ のとき成り立つとすると、 $f_k'(x) = kx^{k-1}$ 。いま、 $f_{k+1}(x) = f_1(x)f_k(x)$ だから、積の微分公式を用いて、

$$\begin{aligned} f_{k+1}'(x) &= (f_1(x)f_k(x))' = f_1'(x)f_k(x) + f_1(x)f_k'(x) \\ &= 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} \\ &= (k+1)x^k \end{aligned}$$

したがって、 $f_n'(x) = nx^{n-1}$ は $n = k+1$ のときも成立。

(I)、(II) より、 $f_n'(x) = nx^{n-1}$ はすべての自然数で成り立つ。

[結論まできちんと述べよ。]

2 【 n が負の整数の場合】

a) 商の微分公式 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$ において $g(x) = x^n$ とすることにより $\left(\frac{1}{x^n}\right)'$ を求めよ。

$g'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ だから、

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

b) a) の結果を利用して $(x^{-n})' = ax^b$ の形の式に直せ。

a) で得られた式を指数を用いて表すと、

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ
	B	1				氏名

3 【 $a = 1/n$ の場合】 $f(x) = x^n$ とすると、関数 $\sqrt[n]{x}$ は、関数 $f(x)$ の逆関数である。すなわち $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である。

a) 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$ であることを示せ。

$f(x) = x^n$ とすると、 $f'(x) = nx^{n-1}$ 、 $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ だから、逆関数の微分公式により、

$$(\sqrt[n]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

b) a) の結果を分数指数を用いて表すことにより $(x^{\frac{1}{n}})' = ax^b$ の形の式に直せ。

$$(x^{\frac{1}{n}})' = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

4 【 a が有理数の場合】 $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ であることを用い、合成関数の微分公式を用いて $(x^{\frac{m}{n}})'$ を ax^b の形に表せ。 [ヒント: $f(x) = x^m$ 、 $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ として、 $x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ とみなすとよい。]

$f(x) = x^m$ 、 $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ とすると、 $x^{\frac{m}{n}} = f(g(x))$ であり、 $f'(x) = mx^{m-1}$ 、 $g'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ だから、合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} (x^{\frac{m}{n}})' &= (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) = m(g(x))^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

5] $x \neq 1$ で、 n が自然数のとき、 $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ が成り立つ。この両辺を x について微分することにより、 $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ を求めよ。

$$(\text{左辺})' = 0 + 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺})' &= \frac{(1 - x^{n+1})'(1 - x) - (1 - x^{n+1})(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \frac{-(n+1)x^n(1 - x) - (1 - x^{n+1}) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n + 1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$

6] 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき、次の導関数を求めよ。

a) $((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$

b) $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

7] 次の関数を変数 x で微分せよ。

a) $f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3 \left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)' \\ &= 4\left(\frac{x^3}{3} + 2x - 5\right)^3 (x^2 + 2) \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}})' \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 - 2x)' \\ &= -(x^2 - 2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x - 1) \\ &= \frac{1 - x}{(\sqrt{x^2 - 2x})^3} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \sqrt[4]{(x^2 + x + 1)^5}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 + x + 1)^{\frac{5}{4}})' \\ &= \frac{5}{4}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{4}} \cdot (x^2 + x + 1)' \\ &= \frac{5}{4}(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{4}} \cdot (2x + 1) \\ &= \frac{5}{4} \frac{2x + 1}{\sqrt[4]{x^2 + x + 1}} \end{aligned}$$

d) $f(x) = (x + 1)\sqrt{2 - x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + 1)'\sqrt{2 - x} + (x + 1)(\sqrt{2 - x})' \\ &= \sqrt{2 - x} + (x + 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2 - x}} \cdot (2 - x)' \\ &= \sqrt{2 - x} + \frac{-(x + 1)}{2\sqrt{2 - x}} \\ &= \frac{2(2 - x) - (x + 1)}{2\sqrt{2 - x}} = \frac{-3(x - 1)}{\sqrt{2 - x}} \end{aligned}$$

e) $f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + 3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x - 1)'(x^2 + 3) - (4x - 1)(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{4(x^2 + 3) - (4x - 1)(2x)}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 2x + 12}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{-2(2x^2 - x - 6)}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

f) $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 - 2x + 3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4 - x^2)'(x^2 - 2x + 3) - (4 - x^2)(x^2 - 2x + 3)'}{(x^2 - 2x + 3)^2} \\ &= \frac{-2x(x^2 - 2x + 3) - (4 - x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \\ &= \frac{2(x^2 - 7x + 4)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \end{aligned}$$