

入学年度	学部	学科	組	番号	検	フリガナ	
	B	1				氏名	

● 合成関数の微分公式 (連鎖律)

2つの微分可能な関数 $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数を $y = f(u)$, $u = g(x)$ の導関数で表したい。いま,

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu ,
 u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とする。すなわち,

$$\begin{aligned} \Delta u &= g(x + \Delta x) - g(x), \\ \Delta y &= f(u + \Delta u) - f(u) \end{aligned}$$

と定義する。ここで、求めたいのは x に対する y の増加率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x \rightarrow 0$ としたときの極限である。 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は、少々無理矢理に Δu を間に挟んで、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (*)$$

と書ける。この両辺の $\Delta x \rightarrow 0$ とした極限を考えると、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで $u = g(x)$ が微分可能な関数であることから、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ となるので、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

が成り立つ。これより、合成関数の微分公式の一つの形である次の式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

合成関数の微分公式を、' を用いた記法で表すことを考えよう。合成関数 $f(g(x))$ の導関数 $(f(g(x)))'$ は

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

で定義される。ここで、 $u = g(x)$ としたとき、 $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ であったから、

$$g(x + \Delta x) = u + \Delta u$$

と書ける。したがって、 $g(x + \Delta x)$, $g(x)$ をそれぞれ、 $u + \Delta u$, u で置き換えて

$$f(g(x + \Delta x)) - f(g(x)) = f(u + \Delta u) - f(u)$$

と書くことができる。そして、(*)と同様に Δu を間に挟むことにより

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

となる。この両辺において $\Delta x \rightarrow 0$ とすると、 $\Delta u \rightarrow 0$ だから、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

ここで、

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$$

だから、

$$(f(g(x)))' = f'(u) \cdot g'(x)$$

$f'(u)$ を x で表すと $f'(u) = f'(g(x))$ と書き直せるので、次の合成関数の微分公式が得られる。

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

● 逆関数の微分公式

関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の微分公式を導きたい。関数 $f(x)$ の逆関数とは、 $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ をみたす関数 $g(x)$ に他ならない。そこで、 $f(g(x)) = x$ の両辺を合成関数の微分法を用いて微分すると、

$$\text{左辺} = f'(g(x))g'(x), \quad \text{右辺} = (x)' = 1$$

となるから、

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

これを $g'(x)$ について解くと、

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$g(x)$ を $f^{-1}(x)$, $g'(x)$ を $(f^{-1}(x))'$ と書き直すことにより、逆関数の導関数の公式が得られる。

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1 $(f(g(h(x))))'$ を求めよ.

$g(h(x)) = G(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} (f(g(h(x))))' &= (f(G(x)))' = f'(G(x))G'(x) \\ &= f'(g(h(x)))(g(h(x)))' \\ &= f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) \end{aligned}$$

2 $(g(x)^2)'$ を求めよ.

$f(x) = x^2$ とおくと, $f'(x) = 2x$ だから, $(g(x)^2)' = f'(g(x))g'(x) = 2g'(x)g(x)$.

3 $f(x) = x^2$ としたとき, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である. 逆関数の微分公式を用いて $(\sqrt{x})'$ を求めよ.

$$f'(x) = 2x \text{ だから, } (\sqrt{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4 前問と同様にして $(\sqrt[3]{x})'$ を求めよ.

$f(x) = x^3$ とおくと, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = 3x^2$ だから,

$$(\sqrt[3]{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3f^{-1}(x)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

5 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (1 - 2x^2)^3$

$$f'(x) = -12x(1 - 2x^2)^2$$

b) $f(x) = \frac{1}{(4x + 3)^2}$

$$f'(x) = \frac{-8}{(4x + 3)^3}$$

c) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^4}$$

d) $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \left(= \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \right)$$

f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{2x - 1}{\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2}}$$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$