入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ
	B	1				氏 名

● 積の微分公式

2 つの微分可能な関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の積として表される関数 $y = uv$ の導関数を求めたい．x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表す．

いま，x を $x + \Delta x$ に変化させたとき，Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える．

x が $x + \Delta x$ に変化したとき

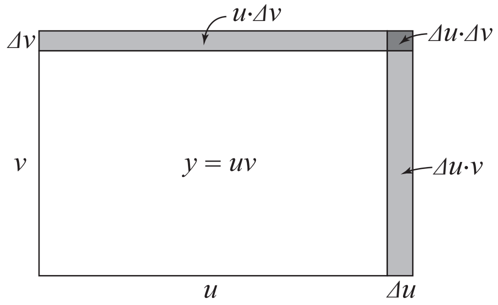
$$u \longrightarrow u + \Delta u, \quad v \longrightarrow v + \Delta v$$

と変化するので，

$$y = uv \longrightarrow (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

と変化する．したがって，y の増分は

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$



と表せる．これを展開して整理すると，

$$\Delta y = \Delta u \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \Delta v + \boxed{\Delta u \Delta v}$$

と表される．この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{\Delta u}{\Delta x}} \cdot v + u \cdot \boxed{\frac{\Delta v}{\Delta x}} + \boxed{\frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}}$$

ここで $\Delta x \to 0$ として $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい．まず，導関数の定義より，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

である．また，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta v \to 0$ となるので，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = \frac{du}{dx} \cdot 0 = 0.$$

が成り立つ．したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{du}{dx}} \cdot \boxed{v} + \boxed{u} \cdot \boxed{\frac{dv}{dx}}$$

この式を別の記号法 $\dfrac{dy}{dx} = \bigl(f(x)g(x)\bigr)'$，$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$，$\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと，次の積の微分公式が得られる．

$$\bigl(f(x)g(x)\bigr)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

● 商の微分公式

次に，2 つの微分可能な関数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ の商として表される関数 $y = \dfrac{u}{v}$ の導関数を求めたい．前と同様に，x, y, u, v の増分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ で表し，x を $x + \Delta x$ に変化させたとき，Δy を Δu と Δv を用いて表すことを考える．

前の場合と同様に，x が $x + \Delta x$ に変化したとき，$u \longrightarrow u + \Delta u$，$v \longrightarrow v + \Delta v$ と変化するので，

$$y = \frac{u}{v} \longrightarrow \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

と変化する．したがって，y の増分は

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

と表せる．これを通分し，整理すると，

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot \boxed{v} - \boxed{u} \cdot \Delta v}{(v + \Delta v)v}$$

と表される．この式の両辺を Δx で割って

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\boxed{\Delta u}}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \dfrac{\boxed{\Delta v}}{\Delta x}}{(v + \Delta v)v}$$

と表される．この式で $\Delta x \to 0$ として $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ を求めたい．まず，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

であり，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta v \to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)v = v^2$ が成り立つ．したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{\dfrac{du}{dx}} \cdot \boxed{v} - \boxed{v} \cdot \boxed{\dfrac{dv}{dx}}}{v^2}$$

この式を別の記号法 $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$，$\dfrac{du}{dx} = f'(x)$，$\dfrac{dv}{dx} = g'(x)$ を用いて書き直すと，次の商の微分公式が得られる．

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$\boxed{1}$ $f(x)g(x)h(x) = \big(f(x)g(x)\big)h(x)$ であることと積の微分公式を用いて 3 つの関数の積の導関数 $\big(f(x)g(x)h(x)\big)'$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\big(f(x)g(x)h(x)\big)' &= \Big(\big(f(x)g(x)\big)h(x)\Big)' = \big(f(x)g(x)\big)'h(x) + \big(f(x)g(x)\big)h'(x)\\ &= \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 次の関数を変数 x で微分せよ.

a) $f(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1)$

$f'(x) = 3x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

$f'(x) = \dfrac{-3}{(3x-2)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{6x^3}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2x^4}$

d) $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2+5}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2+10x+5}{(x^2+5)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

a) 積の微分公式 $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ を用い, 関数 $f(x)^2g(x)$ の導関数 $\big(f(x)^2g(x)\big)'$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\big(f(x)^2g(x)\big)' &= \big(f(x)^2\big)'g(x) + f(x)^2g'(x)\\ &= \big(f'(x)f(x) + f(x)f'(x)\big)g(x) + f(x)^2g'(x)\\ &= 2f(x)f'(x)g(x) + f(x)^2g'(x)\end{aligned}$$

b) $u = f(x)$, $v = g(x)$ とおき, x の関数 y を $y = u^2v$ で定義する. 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

$y = u \cdot u \cdot v$ だから

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx}uv + u\frac{du}{dx}v + u^2\frac{dv}{dx}\\ &= 2uv\frac{du}{dx} + u^2\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 底面の半径が r で, 高さが h の直円錐がある. r, h が時間 t とともに変化するとき, この直円錐の体積 V の t に関する導関数 $\dfrac{dV}{dt}$ を $r, h, \dfrac{dr}{dt}, \dfrac{dh}{dt}$ を用いて表せ.

体積 V は $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ と表せる. 前問の b) を用いて, ここで, r, h, V はそれぞれ時間 t の関数であるから, これらを $r(t), h(t), V(t)$ と書くと,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\frac{d}{dt}(r^2h) = \frac{\pi}{3}\left(2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right)$$

担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)