入学年度	学部	学 科	組	番 号	検	フリガナ	
	B	1				氏 名	

$\boxed{1}$ 次の二つの関数 $f(x), g(x)$ を合成し，$(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ を求めよ．

a) $f(x) = x^2 - 1$，$g(x) = 2x + 1$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(x^2 - 1) + 1 = 2x^2 - 1$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 - 1 = (2x + 1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x$$

b) $f(x) = \dfrac{6}{3 - x}$，$g(x) = \dfrac{-3x}{2 - x}$

$$(g\circ f)(x) = g\left(\frac{6}{3 - x}\right) = \frac{-3\left(\frac{6}{3-x}\right)}{2 - \left(\frac{6}{3-x}\right)} = \frac{-18}{2(3 - x) - 6} = \frac{9}{x}$$

$$(f\circ g)(x) = f\left(\frac{-3}{2 - x}\right) = \frac{6}{3 - \left(\frac{-3}{2-x}\right)} = \frac{6(2 - x)}{3(2 - x) + 3x} = 2 - x$$

c) $f(x) = x + 1$，　$g(x) = |x| + 1$

$$(g\circ f)(x) = g(x + 1) = |x + 1| + 1$$

$$(f\circ g)(x) = f(|x| + 1) = |x| + 1 + 1 = |x| + 2$$

d) $f(x) = 4^x$，$g(x) = \log_2 x$

$$(g\circ f)(x) = g(4^x) = \log_2 4^x = \log_2 (2^2)^x = \log_2 2^{2x} = 2x$$

$$(f\circ g)(x) = f(\log_2 x) = 4^{\log_2 x} = (2^2)^{\log_2 x} = 2^{2\log_2 x} = 2^{\log_2 x^2} = x^2$$

$\boxed{2}$ $f(x) = 1 - x$，$g(x) = \dfrac{1}{1 - x}$，$h(x) = \dfrac{1}{x}$ とする．

a) 合成関数 $(f\circ g)(x)$ と $(g\circ h)(x)$ を求めよ．

$$(f\circ g)(x) = f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = 1 - \frac{1}{1 - x} = \frac{(1 - x) - 1}{1 - x} = \frac{-x}{1 - x}$$

$$(g\circ h)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x}{x - 1}$$

b) $\big((f\circ g)\circ h\big)(x)$ と $\big(f\circ (g\circ h)\big)(x)$ を求め，両者が一致することを示せ．

$$\big((f\circ g)\circ h\big)(x) = (f\circ g)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x - 1}$$

$$\big(f\circ (g\circ h)\big)(x) = f\left(\frac{x}{x - 1}\right) = 1 - \frac{x}{x - 1} = \frac{(x - 1) - x}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1}$$

したがって，確かに $\big((f\circ g)\circ h\big)(x) = \big(f\circ (g\circ h)\big)(x)$ が成り立つ．

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ とする．

a) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

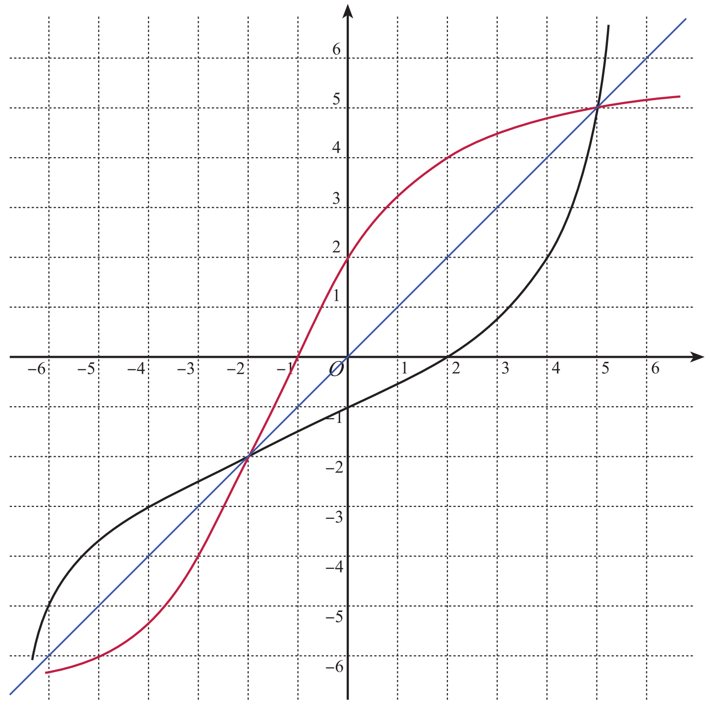
$y = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ を x について解く．
両辺に $x - 3$ をかけ，$(x - 3)y = 2x + 1$．これより，$(y - 2)x = 3y + 1$．
したがって，$y \neq 2$ のとき解を持ち，$x = \dfrac{3y + 1}{y - 2}$．
ここで，x と y を入れ換えて $y = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$．すなわち $f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$．

b) $(f^{-1}\circ f)(x)$ と　$(f\circ f^{-1})(x)$ をそれぞれ計算せよ．

$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}\left(\frac{2x + 1}{x - 3}\right) = \frac{3\frac{2x+1}{x-3} + 1}{\frac{2x+1}{x-3} - 2} = \frac{3(2x + 1) + (x - 3)}{(2x + 1) - 2(x - 3)} = \frac{7x}{7} = x$$

$$(f\circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{3x + 1}{x - 2}\right) = \frac{2\frac{3x+1}{x-2} + 1}{\frac{3x+1}{x-2} - 3} = \frac{2(3x + 1) + (x - 2)}{(3x + 1) - 3(x - 2)} = \frac{7x}{7} = x$$

4 下の図のグラフは，関数 $y = f(x)$ のグラフである．その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，$y = f(x)$ のグラフを直線 $\boxed{y = x}$ に関し $\boxed{\text{線対称}}$ 移動したものである．$y = f^{-1}(x)$ のグラフを下の図に書き込め．



5 $f(x) = -\sqrt{-3x + 6}$ とする．

a) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を示せ．

根号内 $\geqq 0$ より，$-3x + 6 \geqq 0 \Leftrightarrow x \leqq 2$.

$y = -\sqrt{x}$ の値域は $y \leqq 0$ なので，$y = -\sqrt{-3x + 6}$ の値域も $y \leqq 0$.

b) 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ．

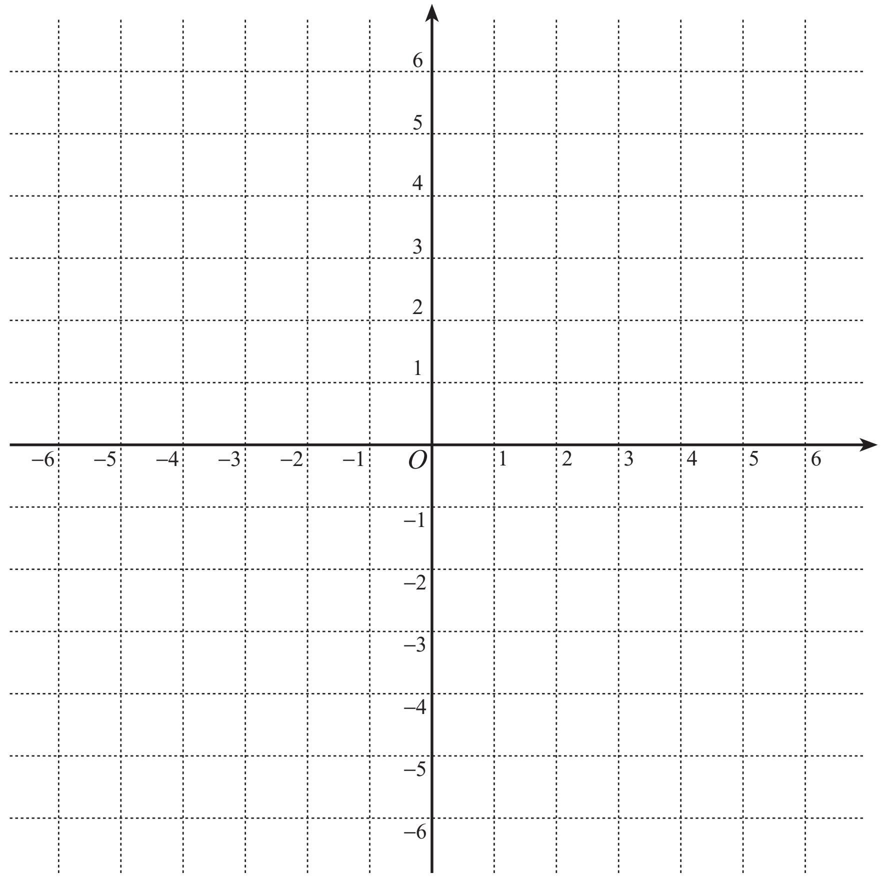
$y = -\sqrt{-3x + 6}$ の両辺を 2 乗して，$y^2 = -3x + 6$. これを x について解くと，$x = -\frac{1}{3}y^2 + 2$.
ここで，x と y を入れ換えて，$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$. すなわち，$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$.（ただし，定義域は $x \leqq 0$ に制限される.）

c) $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域を示せ．

$y = f^{-1}(x)$ の定義域は，$y = f(x)$ の値域より，$x \leqq 0$.

$y = f^{-1}(x)$ の値域は，$y = f(x)$ の定義域より，$y \leqq 2$.

d) $y = f(x)$ のグラフと逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを描け．



担当：鍬田 政人 (kuwata.04f@g.chuo-u.ac.jp)